कक्षा XI-XII के लिए

गणित

की पाठ्यपुस्तक

पुस्तक V

एस० सी० दास — बी० देवकीनन्दन

जी० डी० ढल — एस० के० सिंह गौतम

के० सी० मदान — राम अवतार

सम्पादक

एस० सी० दास



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

National Council of Educational Research and Training

प्रथम संस्करण
जनवरी 1981
पौष 1902

पुनर्मुद्रण
जून 1983
ज्येष्ठ 1905
P. D. 4T—R. P.

मूल्य : रु० 6.35

प्रकाशन विभाग से सी० रामचन्द्रन, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा सरस्वती प्रिंटिंग प्रेस, मौजपुर, दिल्ली 110053 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "कक्षा XI-XII के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक" की शृंखला की पाँचवीं पुस्तक है। पुस्तक IV को पहले उस समय के पाठ्यक्रम के अनुसार अंतिम पुस्तक समझा गया था। परन्तु पाठ्यक्रम में कुछ परिवर्तनों के कारण इस पुस्तक का लिखना आवश्यक हो गया। यह आशा की जाती है कि इस शृंखला की पुस्तकों I से IV तक के साथ यह पुस्तक पाठ्यक्रम में दिए सभी मुख्य विषयों को सम्मिलित कर लेगी तथा अध्यापकों एवं विद्यार्थियों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी।

पुस्तक का प्रथम प्रारूप अल्प समय में राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन० सी० ई० आर० टी०) में विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के गणित एकक द्वारा तैयार किया गया। इस प्रारूप का संशोधन डा० एस० सी० दास द्वारा किया गया जिन्होंने इस पुस्तक के अधिकांश भाग के विकास में भी महत्त्वपूर्ण योगदान किया। संशोधित सामग्री का एक कार्यशाला में अनुभवी अध्यापकों द्वारा समीक्षात्मक विवेचन किया गया। अंतिम-लेखन तथा विषय-संपादन डा० एस० सी० दास द्वारा किया गया। पुस्तक का हिंदी संस्करण डा० एस० के० सिंह गौतम तथा श्री महेन्द्र शंकर की देखरेख में तैयार किया गया।

मैं कार्यदल के सभी सदस्यों के प्रति कृतज्ञता प्रकट करता हूँ, विशेष रूप से डा० एस० सी० दास के प्रति, जिन्होंने इतने कम समय में स्वयं विभाग में ही पुस्तक के संपादन तथा इसे वर्तमान रूप में तैयार करने का उत्तरदायित्व लिया।

इस पुस्तक में सुधार हेतु राष्ट्रीय परिषद् इसके उपयोगकर्ताओं की प्रतिक्रियाओं तथा सुझावों का स्वागत करेगी।

शिवकुमार मित्र
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
जून, *1980*

प्रस्तावना

प्रस्तुत पुस्तक में पाँच मुख्य विषयों : प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, अवकल समीकरण, त्रिविमीय ज्यामिति, कुछ असंतत तथा संतत प्रायिकता बंटन तथा सहसंबंध के बारे में अध्ययन किया गया है। पृष्ठों की संख्या की सीमा को ध्यान में रखते हुए इन विषयों के बृहत सिद्धांतों का पूर्ण रूप से उल्लेख करना संभव नहीं था। फिर भी संकल्पनाओं के विकास में रिक्तता को दूर करने तथा सततता बनाए रखने का भरसक प्रयत्न किया गया है।

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के एककों में एक-मानीयता तथा मुख्यमान शाखाओं की चर्चा की गई है। चूंकि फलनों की सीमाओं एवं सततता, और उनके अवकलों तथा समाकलों के मूलभूत सिद्धांतों के बारे में पहले की पुस्तकों में बताया जा चुका है, इसलिए यहाँ पर केवल महत्वपूर्ण परिणामों का ही उल्लेख किया गया है। अभ्यास तथा अंतर्ज्ञान प्रदान करने के लिए विभिन्न प्रकार के सरल तथा कठिन प्रश्न सम्मिलित किए गए हैं। सरलता के लिए सभी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख खींचने के सिद्धांत को छोड़ दिया गया है। अवकल समीकरण परिभाषित करने से पहले "अवकल" की संकल्पना के विकास को आवश्यक समझा गया जिससे विद्यार्थी पिछली कक्षाओं में परिचित नहीं थे। इस संकल्पना का उपयोग फलनों के समाकलों को प्रतिस्थापन द्वारा ज्ञात करने में भी किया गया है। अवकल समीकरणों तथा उनके हलों की ज्यामितीय व्याख्या के बारे में विस्तारपूर्वक चर्चा करना इस पुस्तक की सीमा के बाहर माना गया है। त्रिविमीय ज्यामिति में यह मान लिया गया है कि विद्यार्थी तलों तथा ठोस ज्यामिति के मूलभूत अभिग्रहीतों तथा प्रमेयों से पूर्व परिचित हैं। फिर भी यह अच्छा होगा कि अध्यापक इन मूलभूत संकल्पनाओं का पुनरावलोकन करा दें। विद्यार्थियों की सहायता के लिए पर्याप्त संख्या में हल उदाहरण तथा प्रश्नावलियों में प्रश्न दिए गए हैं। द्विपद प्रायिकता बंटन से प्वासों सन्निकटन को निकालते समय e^{x} के प्रसार का उपयोग किया गया है। परन्तु इस फलन को इसके प्रयोग करने से पहले परिभाषित कर दिया गया है। यह आशा नहीं की जा सकती कि विद्यार्थी "अनंत समाकल" की संकल्पना के बारे में जानते हों और इसीलिए प्रसामान्य बंटन के विकास में इसका प्रयोग करने से पहले इसके बारे में एक संक्षिप्त टिप्पणी दे दी गई है। संख्यात्मक परिकलनों में अनावश्यक जटिलता को दूर रखने के लिए, सांख्यिकी में वर्गीकृत आँकड़ों का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करना छोड़ दिया गया है।

पुस्तक की प्रमुख विशेषताओं को नीचे दिया जा रहा है :

(1) विवेचन की सततता को बनाए रखते हुए, पुस्तक के आकार को छोटे से छोटा रखा गया है। "मुख्य संकल्पनाओं", "ऐतिहासिक टिप्पणियों" आदि को अलग से देना छोड़ दिया गया है। आधारभूत परिभाषाओं तथा कल्पनाओं का अलग से स्पष्ट रूप से उल्लेख किया गया है तथा परिशुद्धता बनाए रखने का प्रत्येक प्रयत्न किया गया है।

(2) प्रत्येक विषय में सिद्धांत तथा प्रश्नों पर पूर्णतया, जितना संभव हो सका है, बल दिया गया है ।

(3) पाण्डित्य-प्रदर्शन को दूर रखा गया है, परन्तु यथार्थता के मूल्य पर नहीं ।

(4) केवल आवश्यक आकृतियों एवं चित्रों को ही दिया गया है ।

(5) क्योंकि पुस्तक IV में समाकलन के सिद्धांत का वर्णन किया जा चुका है, इसलिए विद्यार्थी के सोचने की क्षमता बढ़ाने तथा यह पुनः स्मरण कराने के लिए कि वह पहले क्या सीख चुका है, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों तथा अवकल समीकरणों के एककों में समाकलन से संबद्ध प्रश्नों के हल ज्ञात करते समय कुछ अनावश्यक चरणों को जानबूझ कर छोड़ दिया गया है ।

(6) विद्यार्थी को भविष्य में अपनी प्रतियोगात्मक परीक्षाओं की तैयारी में समर्थ होने के लिए प्रत्येक प्रश्नावली में विभिन्न प्रकार के, सरल से प्रारम्भ करके कठिनता की ओर बढ़ते हुए, प्रश्नों को दिया गया है । एक ही प्रकार के अधिक प्रश्नों को देने का प्रयत्न नहीं किया गया है ।

(7) पुस्तक के अंत में उत्साहपूर्ण विद्यार्थियों के आगे पढ़ने के लिए सरल तथा शायद सरलता से मिल सकने वाली पुस्तकों की एक सूची दी गई है ।

अंत में, मैं वि० एवं ग० शि० वि० के गणित एकक के विभिन्न सदस्यों द्वारा इस पुस्तक के विभिन्न एककों को तैयार करने के लिए दिए गए विभिन्न प्रकार के योगदान को बताना चाहूँगा :

(i) प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन—डा० एस० सी० दास

(ii) अवकल समीकरण—डा० एस० सी० दास, डा० राम अवतार तथा डा० बी० देवकीनन्दन

(iii) त्रिविमीय ज्यामिति—डा० एस० सी० दास तथा डा० एस० के० सिंह गौतम

(iv) कुछ असंतत तथा संतत प्रायिकता बंटन—डा० के० सी० मदान

(v) सहसंबंध—श्री जी० डी० ढल

श्री आर० एस० कोठारी तथा डा० आत्मा राम साहू ने क्रमशः त्रिविमीय ज्यामिति तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के एककों में महत्त्वपूर्ण सुझाव दिए । श्री जी० डी० ढल तथा श्री महेन्द्र शंकर ने अंतिम स्तर पर पांडुलिपि को पढ़ा तथा महत्वपूर्ण सुझाव दिए । श्री महेन्द्र शंकर ने अंतिम प्रूफ पढ़ने में भी सहायता दी । विभागीय चित्रकार श्रीमती कमला धिमन ने पुस्तक के सभी रेखाचित्रों को बनाया । पुस्तक का हिंदी संस्करण डा० एस० के० सिंह गौतम तथा श्री महेन्द्र शंकर की देखरेख में पूरा हुआ ।

मैं विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के इन सभी सदस्यों का आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक को कम से कम सम्भव समय में तैयार करने में विभिन्न प्रकार से मेरी सहायता की । मैं उन सब का भी आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक की पाठ्य सामग्री की समीक्षात्मक विवेचना हेतु आयोजित कार्यशाला में भाग लिया ।

यद्यपि पुस्तक में त्रुटियाँ ज्ञात करने तथा उन्हें दूर करने का हर संभव प्रयत्न किया गया है, फिर भी मैं उन सभी पाठकों का आभारी रहूँगा जो मुझे किसी त्रुटि से अवगत करायेंगे । पुस्तक में सुधार हेतु पाठकों द्वारा दिए गए सुझावों का अत्यधिक स्वागत किया जायेगा ।

एस० सी० दास

सम्पादक

कृतज्ञताज्ञापन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग (वि० एवं ग० शि० वि०, रा० शै० अ० और प्र० प०) के गणित एकक द्वारा तैयार की गई इस पाठ्यपुस्तक की मूल सामग्री की 10 तथा 11 अप्रैल 1980 को आयोजित एक कार्यशाला में समीक्षात्मक विवेचना करने में एक महत्त्वपूर्ण योगदान किया :

1. कु० एस० अग्रवाल
   इन्द्रप्रस्थ कालेज, दिल्ली
2. डा० एस० सी० दास
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
3. श्रीमती एस० देवासुन्दरम्
   सेन्ट जेवियर्स स्कूल, दिल्ली
4. श्री जी० डी० दत्त
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
5. श्रीमती एच० के० धीर
   राजकीय सीनियर माध्यमिक बालिका विद्यालय, नई दिल्ली
6. श्रीमती कमला दत्ता
   राजकीय सीनियर माध्यमिक बालिका विद्यालय, दिल्ली
7. डा० जी० एल० फोतेदार
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
8. श्रीमती कृष्णा गाडी
   स्प्रिंगडेल्स विद्यालय, पूसा रोड, नई दिल्ली
9. डा० एस० के० सिंह गौतम
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
10. श्रीमती उर्मिल गोयल
    राजकीय सीनियर माध्यमिक बालिका विद्यालय, दिल्ली
11. श्री ईश्वर चन्द्र
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

12. श्री जे० पी० कंसल
एयर फोर्स केन्द्रीय विद्यालय, दिल्ली
13. श्री आर० एस० कोठारी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
14. डा० के० सी० मदान
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
15. श्री वाई० मागो
सरदार पटेल विद्यालय, नई दिल्ली
16. श्री महेन्द्र शंकर
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
17. श्रीमती जे० मुशरान
लेडी इरविन उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, नई दिल्ली
18. श्रीमती एच० नारंग
लेडी इरविन उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, नई दिल्ली
19. श्री वी० के० रजवार
दिल्ली पब्लिक स्कूल, रामकृष्ण पुरम, नई दिल्ली
20. डा० राम अवतार
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
21. श्री एस० के० राय चौधरी
रायसेना बंगाली उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, नई दिल्ली
22. डा० ए० आर० साहू
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
23. कु० एस० सक्सेना
लेडी इरविन उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, नई दिल्ली
24. श्री ओ० पी० शिवरान
केन्द्रीय विद्यालय, आई० एन० ए० कालोनी, नई दिल्ली
25. श्री यशपाल वर्मा
नवयुग स्कूल, नई दिल्ली
26. श्री पी० के० व्यवहारे
मदर्स इन्टरनेशनल स्कूल, नई दिल्ली

विषय-सूची

प्रतिलोम त्रिकोणमिती

एकक 1

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषाएँ तथा उनके गुणधर्म

1.1 भूमिका

पुस्तक IV में केवल बहुपद, लघुगणक तथा घातांकीय फलनों के संदर्भ में प्रतिलोम फलनों की परिभाषा तथा कुछ गुणधर्मों का वर्णन किया गया है। उपर्युक्त के अतिरिक्त अब हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (inverse trigonometric functions) तथा उनके गुणधर्मों का वर्णन करेंगे। तदुपरान्त, हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं (limits), सातत्य (continuity) तथा उनके अवकलजों (derivatives) और समाकलों (integrals) पर विचार करेंगे।

1.2 त्रिकोणमितीय फलनों के प्रतिलोम

त्रिकोणमितीय फलनों से पाठक परिचित हैं। उदाहरणार्थ, समीकरण

$$x = \sin \theta$$

का अर्थ है कि θ वह कोण है जिसका ज्या (sine) x है। विपरीत रूप में इस कथन को

$$\theta = \sin^{-1} x$$

द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है तथा हम इसे "θ, ज्या प्रतिलोम (sine inverse) x के बराबर है" पढ़ते हैं। इस प्रकार, संकेत $\sin^{-1}x$, उस कोण द्वारा परिभाषित किया गया है जिसकी ज्या (sine), x है तथा $\sin^{-1}x$ फलन $\sin x$ का **प्रतिलोम** (**inverse**) कहलाता है। इसी प्रकार, संकेत $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ तथा $\text{cosec}^{-1}x$ भी क्रमशः $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ तथा $\text{cosec}\, x$ के प्रतिलोमों के रूप में परिभाषित किये गये हैं।

टिप्पणी 1 : $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$, अर्थात्, $\frac{1}{\sin x}$ का भ्रम नहीं होना चाहिये। इसी प्रकार का भ्रम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के प्रतिलोमों के विषय में भी नहीं होना चाहिए।

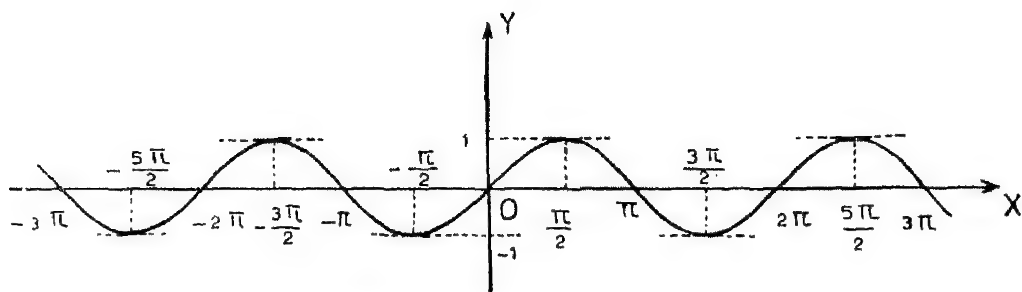
टिप्पणी 2 : $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, इत्यादि को क्रमशः arc sin x, arc cos x, arc tan x, इत्यादि द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।

टिप्पणी 3 . ध्यान दीजिए कि $\sin^{-1}x$ एक कोण को निरूपित करता है जबकि $\sin x$ एक संख्या को निरूपित करता है। ऐसी ही स्थिति अन्य त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनके प्रतिलोमों में होती है।

1.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की मुख्य मान शाखाएँ

हम जानते हैं कि यदि θ कोई कोण हो जिसका sine, x के बराबर हो तो उन सभी कोणों के sine के मान, जो $n\pi+(-1)^n\theta$ द्वारा प्राप्त होते हैं, x के बराबर होते हैं, जहाँ $n=0, \pm1, \pm2, \pm3,\ldots$ है। अतः $\sin^{-1}x$ अनंत मान प्राप्त कर सकता है। उदाहरणार्थ, $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ के मान 30°, 150°, 390°, इत्यादि हो सकते हैं। इस प्रकार, $\sin^{-1}x$ एक बहुमानी फलन* (multiple-valued function) है। इसी प्रकार, प्रत्येक अन्य त्रिकोणमितीय फलन का प्रतिलोम बहुमानी होता है।

अब क्योंकि कैलकुलस में हम बहुमानी फलनों को स्वीकार नहीं करते हैं, अतः हमें $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, इत्यादि को x का फलन तब तक नहीं कहना चाहिए जब तक कि हम इन्हें प्रतिबंधित कर एकमानी फलन** (single-valued function) नहीं बना लेते। इस बहुमानी होने का कारण यह है कि कोई भी त्रिकोणमितीय फलन अंतराल $-\infty<x<\infty$ में न तो निरंतर वर्धमान (strictly increasing) होता है तथा न ही निरन्तर ह्रासमान*** (strictly decreasing) होता है। अतः अन्तराल $-\infty<x<\infty$ में इन फलनों के प्रतिलोमों का कोई अस्तित्व नहीं होता। परन्तु $y=\sin x$



आकृति 1.1 $y=\sin x$ का आलेख

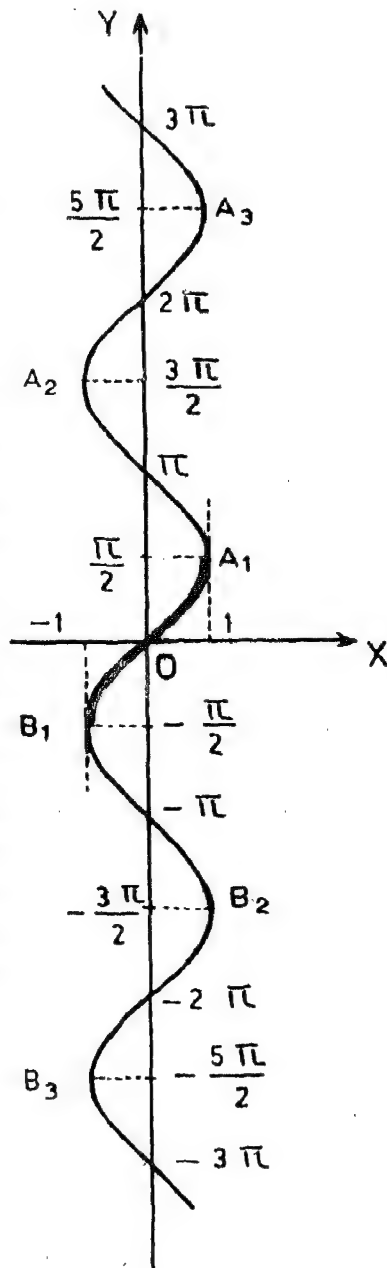
---

* फलन $y=f(x)$ **एक बहुमानी फलन** कहलाता है, यदि x के किसी एक मान के तदनुरूपी हमें y के दो या अधिक मान प्राप्त हों।

फलन $y=f(x)$ एक **एकमानी फलन कहलाता है, यदि x के किसी एक मान के तदनुरूपी हमें y का केवल एक ही मान प्राप्त हो।

***फलन $y=f(x)$ **निरन्तर वर्धमान** कहा जाता है, यदि $f(x_2)>f(x_1)$ तब हो जब $x_2>x_1$ हो तथा फलन **निरंतर ह्रासमान** कहा जाता है, यदि $f(x_2)<f(x_1)$ तब हो जब $x_2>x_1$ हो, जहाँ x_2 तथा x_1, x के कोई भी दो मान हैं। इन दोनों स्थितियों में से किसी भी एक को व्यक्त करने के लिए पद **निरंतर एकदिष्ट (strictly monotonic)** का प्रयोग किया जा सकता है।

के आलेख (देखिये आकृति 1.1) से हम देखते हैं कि अन्तरालों $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-3\pi}{2}$, इत्यादि में $y = \sin x$ निरंतर वर्धमान है तथा अंतरालों $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, इत्यादि में निरन्तर ह्रासमान है। इस प्रकार, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि y के किसी भी मान के लिए उपर्युक्त प्रत्येक अन्तराल में फलन $x = \sin^{-1}y$ का एक **अद्वितीय** मान होता है, जबकि $-1 \leqslant y \leqslant 1$ है। अतः, $x = \sin^{-1}y$ एक एकमानी फलन है। इसी प्रकार के तर्क से हम प्रत्येक अन्य प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन के लिए अनंत अंतराल ज्ञात कर सकते हैं जिनमें वह फलन एकमानी है। x तथा y को परस्पर बदलने पर हम कह सकते हैं कि प्रतिलोम sine फलन $y = \sin^{-1}x$, अंतरालों $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2} \leqslant y \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2} \leqslant y \leqslant -\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{2}$, इत्यादि में से प्रत्येक में परिभाषित है, जबकि $-1 \leqslant x \leqslant 1$ है।



आकृति 1.2 $y = \sin^{-1}x$ का आलेख

या, $\sin\theta = \frac{1}{x}$

या, $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

अतः, $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

अन्य परिणाम इसी प्रकार सिद्ध किये जा सकते हैं।

(ग) क्योंकि $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ तथा $\operatorname{cosec}^{-1} x$ के मुख्य मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं, अतः हम x के धनात्मक तथा ऋणात्मक मानों के लिए इन फलनों की प्रकृति (nature) की जाँच करते हैं। हम दिखायेंगे कि

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x;$$
$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$$

तथा $$\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$$

और भी, $$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x,$$
$$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x \text{ तथा}$$
$$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$$

यह सिद्ध करने के लिए कि $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, हम

$\sin^{-1}(-x) = \theta$ लेते हैं।

अतः, $\sin\theta = -x$

या, $\sin(-\theta) = x$

या, $-\theta = \sin^{-1} x$

या, $\theta = -\sin^{-1} x$

अतः, $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

अन्य परिणामों की उपपत्ति इसी प्रकार से दी जा सकती है तथा उन्हें पाठकों के लिए छोड़ दिया गया है।

(घ) अब हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के निम्नलिखित आधारभूत सूत्रों (fundamental formulae) को सिद्ध करेंगे :

(i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(iv) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$, $(xy < 1)$

(v) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

(vi) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ *

उपपत्ति :

(i) माना $\sin^{-1} x = \theta$

इसलिए, $\sin \theta = x$

इसलिए, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

या, $\frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} x$

इसलिए, $\theta = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$

इसलिए, $\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$

या, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

इस प्रकार, वाँछित परिणाम सिद्ध हो जाता है।

परिणामों (ii) और (iii) की उपपत्ति इसी प्रकार दी जा सकती है। परिणामों (iv) और (v) की उपपत्ति पाठकों के लिये अभ्यासार्थ छोड़ी जा रही है।

(vi) माना $\tan^{-1} x = \theta$

इसलिए, $\tan \theta = x$

क्योंकि, $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} = \frac{2x}{1+x^2}$

इसलिए, $2\theta = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$

या, $2 \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ (1)

पुनः, $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

इसलिए, $2\theta = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

या, $2 \tan^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$ (2)

---

* जहाँ तक फलनों के मुख्य मानों का संबंध है, ये परिणाम x के प्रतिबंधित मानों के लिए ही सत्य हैं। इस प्रकार, $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1} x$, यदि $-1 \leq x \leq 1$, $\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\tan^{-1} x$, यदि $0 \leq x < \infty$ तथा $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$, यदि $-1 < x < 1$ है।

अन्त में, $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1-x^2}$

इसलिए, $2\theta=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

इसलिए, $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ (3)

इस प्रकार, वाँछित परिणाम सिद्ध हो जाते हैं ।

1.5 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : निम्न के मुख्य मान ज्ञात कीजिये :

(i) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (ii) $\cos^{-1}(0)$

हल : (i) माना $\cot^{-1}(-\sqrt{\ })=\theta$

इसलिए, $\cot\theta=-\sqrt{3}$

अब, हम जानते हैं कि $\cot^{-1}x$ की मुख्य मान शाखा $0<\cot^{-1}x<\pi$ है ।

इसलिए, हमें θ का एक ऐसा धनात्मक मान ज्ञात करना है जो 0 और π के मध्य स्थित हो ।

अब, उपर्युक्त समीकरण से, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{5\pi}{6}$$

इसलिए, $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$ है, जो 0 तथा π के मध्य स्थित है ।

अतः, $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $\dfrac{5\pi}{6}$ है ।

(ii) माना $\cos^{-1}(0)=\theta$

इसलिए, $\cos\theta=0=\cos\dfrac{\ }{2}$

अतः $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ है, जो 0 तथा π के मध्य स्थित है ।

अतः, $\cos^{-1}(0)$ का मुख्य मान $\dfrac{\pi}{2}$ है ।

उदाहरण 2 : फलन $\cot^{-1}x$ की मुख्य मान शाखा के अतिरिक्त दो अन्य शाखाएँ ज्ञात कीजिए ताकि फलन, उन शाखाओं में परिभाषित किया जा सके ।

हल : आइए फलन

$$y=\cot x$$

पर विचार करें । हम जानते हैं कि यह त्रिकोणमितीय फलन अनंत बिंदुओं $x=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,$ इत्यादि पर असतत (discontinuous) है, क्योंकि इन बिंदुओं पर y का अस्तित्व नहीं होता है ।

अन्य सभी बिंदुओं पर फलन सतत है। अतः हम कह सकते हैं कि प्रत्येक अंतराल $0<x<\pi$, $\pi<x<2\pi$, $-\pi<x<0$, $2\pi<x<3\pi$, $-2\pi<x<-\pi$, इत्यादि में फलन $y=\cot x$ सतत है। क्योंकि इन अंतरालों में से प्रत्येक में $\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x<0$ है, अतः इन अंतरालों में से प्रत्येक में फलन $y=\cot x$ निरंतर ह्रासमान है। अतः, इन अंतरालों में से प्रत्येक में फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व है।

अतः, मुख्य मान शाखा के अतिरिक्त $\cot^{-1}x$ की अन्य दो शाखाएँ, जिनमें इस प्रतिलोम का अस्तित्व है, $\pi<\cot^{-1}x<2\pi$ तथा $2\pi<\cot^{-1}x<3\pi$ ली जा सकती हैं।

उदाहरण 3 : सिद्ध कीजिये कि $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ है।

हल : माना $\sin^{-1}x=\theta$

इसलिये, $\sin\theta=x$

अब, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2x\sqrt{1-x^2}$

इसलिये, $2\theta=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

या, $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

इस प्रकार, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}\frac{2}{11}+\cot^{-1}\frac{24}{7}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

हल :

$$\text{वाम पक्ष}=\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}=\tan^{-1}\frac{\frac{125}{264}}{\frac{250}{264}}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$=$ दक्षिण पक्ष

इस प्रकार, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण 5 : $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$ है। अतः, दिये हुए व्यंजक का मान $\sin\frac{\pi}{2}$, अर्थात्, 1 है।

उदाहरण 6 : $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)$, $(x>0)$ को हल कीजिए।

हल : माना $\cos^{-1}x=\theta$

इसलिए, $\cos\theta=x$

इसलिए, $\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$

इसलिए, $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

या, $\tan(\cos^{-1}x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (1)

पुनः माना, $\tan^{-1}2=\phi$

इसलिए, $\tan\phi=2$

इसलिए, $\sin\phi=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\phi}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\phi}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

या, $\sin(\tan^{-1}2)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (2)

अतः, (1) तथा (2) से

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

या, $\dfrac{1-x^2}{x^2}=\dfrac{4}{5}$

या, $5-5x^2=4x^2$

या, $9x^2=5$

इसलिए, $x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

क्योंकि $x>0$ है, इसलिए वाँछित हल $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ है।

उदाहरण 7 : निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिये :

(*i*) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (*ii*) $\tan^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}$

हल : (*i*) $x=\sec\theta$ लीजिये।

इसलिये, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\sec^2\theta-1}=\tan\theta$

इसलिये, $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\tan^{-1}\left[\dfrac{1}{\tan\theta}\right]$

$$=\tan^{-1}(\cot\theta)$$

$$=\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$$

यह दिये हुए फलन का वाँछित सरलतम रूप है।

(*ii*) $x=\tan\theta$ लीजिये।

इसलिए, $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sec\theta$

इसलिए, $\tan^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}=\tan^{-1}\left\{\dfrac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right\}$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right\}$$

$$=\tan\left\{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right\}$$

$$=\tan^{-1}\left\{\tan\frac{\theta}{2}\right\}$$

$$=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

यह दिये हुए फलन का वांछित सरलतम रूप है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित कोणों के रेडियन में मुख्यमान ज्ञात कीजिये :

(*i*) $\sin^{-1}(1)$ (*ii*) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ (*iii*) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$

(*iv*) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ (*v*) $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (*vi*) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(*vii*) $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$ (*viii*) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक फलन की मुख्य मान शाखा को छोड़कर, अन्य तीन शाखाएँ इस प्रकार ज्ञात कीजिये कि इन शाखाओं में फलन का अस्तित्व हो :

(*i*) $\tan^{-1}x$ (*ii*) $\operatorname{cosec}^{-1}x$ (*iii*) $\sec^{-1}x$

3. निम्नलिखित में से कौन-कौन परिभाषित नहीं हैं ?

(*i*) $\operatorname{cosec}^{-1}(\sqrt{2})$ (*ii*) $\cos^{-1}(-\sqrt{2})$ (*iii*) $\cot^{-1}(1000)$

(*iv*) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (*v*) $\sin^{-1}(\tan 47^\circ)$ (*vi*) $\tan^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(*vii*) $\tan^{-1}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2}\right)$ (*viii*) $\operatorname{cosec}(\cot^{-1}0)$

(प्रश्न 4 से 10 तक में) सिद्ध कीजिए कि

4. $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$

5. $3 \cos^{-1} x = \cos^{-1} (4x^3 - 3x)$

6. $2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$

7. $\tan^{-1} \frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1} \frac{b-c}{1+bc} = -\tan^{-1} \frac{c-a}{1+ca}$

8. $\sin (2 \sin^{-1} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

9. $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x}$

10. $\sec^2 (\tan^{-1} 2) + \operatorname{cosec}^2 (\cot^{-1} 3) = 15$

11. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(*i*) $\cot (\tan^{-1} a + \cot^{-1} a)$

(*ii*) $\tan\left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

12. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिये :

(*i*) $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} + \cot^{-1} \frac{1-x^2}{2x} = \frac{\pi}{3}, \ (x > 0)$

(*ii*) $\tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \tan^{-1} x, \ (x > 0)$

13. निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिये :

(*i*) $\tan^{-1} \left[\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$

(*ii*) $\tan^{-1} \left[\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2-3x^2)}\right]$

*(*iii*) $\sin^{-1} (x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2})$

(*iv*) $\tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right]$

(*v*) $\tan^{-1} \left[\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right], \ (x < \pi)$

(*vi*) $\tan^{-1} \left[\frac{\cos x}{1+\sin x}\right]$

*(*vii*) $\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}\right]$

*(*viii*) $\cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}\right], \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

एकक II

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ, सातत्य तथा अवकलज

2.1 भूमिका

त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं (limits) और सातत्य (continuity) का पुस्तक IV में उल्लेख किया गया है। हम देख चुके हैं कि x के सभी मानों के लिए $\sin x$ तथा $\cos x$ सतत (continuous) होते हैं। आपको यह भी याद होगा कि $\tan x\left(=\frac{\sin x}{\cos x}\right)$ तथा $\sec x\left(=\frac{1}{\cos x}\right)$, x के उन मानों को छोड़कर जहाँ $\cos x$ शून्य, अर्थात्, जहाँ $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, n एक पूर्णांक है, उसके अन्य सभी मानों के लिए सतत हैं। साथ ही, $\cot x\left(=\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ तथा $\operatorname{cosec} x\left(=\frac{1}{\sin x}\right)$, x के उन मानों को छोड़कर जहाँ $\sin x$ शून्य, अर्थात्, जहाँ $x=n\pi$ जबकि $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ है, उसके अन्य सभी मानों के लिए सतत हैं। इन त्रिकोणमितीय फलनों के सातत्य के ज्ञान के आधार पर अब हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के सातत्य और फिर उनकी सीमाओं पर विचार करेंगे। तदुपरांत हम इन फलनों के अवकलजों पर विचार करेंगे।

2.2 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएँ तथा सातत्य

हम देख चुके हैं कि सभी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अनन्त अंतरालों में अपना अस्तित्व रखते हैं। क्योंकि प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख रेखा $y=x$ में तदनुरूपी त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों के दर्पण प्रतिबिम्ब होते हैं तथा क्योंकि त्रिकोणमितीय फलन, उन बिन्दुओं को छोड़कर जिनका उल्लेख अनुच्छेद 2.1 में किया गया है, चर के सभी मानों के लिए सतत होते हैं, अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि प्रत्येक प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन उस प्रत्येक अन्तराल में जिसमें उसका अस्तित्व होता है चर x के सभी मानों के लिये सतत होता है। अतः, इन मानों के लिये इन फलनों की सीमाओं का भी अस्तित्व होना है।

उपर्युक्त से हम निम्नलिखित परिणाम लिख सकते हैं :

(i) $\underset{x\to a}{\text{सीमा}} \sin^{-1}x=\sin^{-1}a \qquad (|a|\leqslant 1)$

(ii) $\underset{x\to a}{\text{सीमा}} \cos^{-1}x=\cos^{-1}a \qquad (|a|\leqslant 1)$

(iii) $\lim_{x \to a} \tan^{-1}x = \tan^{-1}a$ $(-\infty < a < \infty)$

(iv) $\lim_{x \to a} \cot^{-1}x = \cot^{-1}a$ $(-\infty < a < \infty)$

(v) $\lim_{x \to a} \sec^{-1}x = \sec^{-1}a$ $\begin{pmatrix} 1 \leq a < \infty \\ \text{या} \\ -\infty < a \leq -1 \end{pmatrix}$

(vi) $\lim_{x \to a} \text{cosec}^{-1}x = \text{cosec}^{-1}a$ $\begin{pmatrix} 1 \leq a < \infty \\ \text{या} \\ -\infty < a \leq -1 \end{pmatrix}$

(सीमा = lim)

अब हम कुछ ऐसे फलनों, जिनमें प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन सम्बद्ध हैं, की सीमाओं और सातत्य सम्बन्धी कुछ प्रश्नों को हल करेंगे। ऐसे फलनों की सीमाएँ ज्ञात करने की व्यापक विधि यह है कि उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा प्रतिलोम फलनों को त्रिकोणमितीय फलनों में बदल दिया जाता है।

2.3 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : निम्नलिखित सीमाओं को परिकलित कीजिए :

(*i*) $\text{सीमा}_{x \to 0} \left(\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)$ (*ii*) $\text{सीमा}_{x \to 1} \left[\frac{1-x}{\pi - 2\sin^{-1}x}\right]$

(*iii*) $\text{सीमा}_{x \to 1} \frac{1-x}{(\cos^{-1}x)^2}$

हल (*i*) $x = \sin\theta$ लीजिए।

इसलिए, जब $x \to 0$, $\theta \to 0$

अतः, दी हुई सीमा

$$= \text{सीमा}_{\theta \to 0} \frac{\sin^{-1}(\sin\theta)}{\sin\theta} = \text{सीमा}_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta}$$

$$= 1$$

(*ii*) $x = \sin\theta$ लीजिए।

इसलिए, जब $x \to 1$, $\theta \to \frac{\pi}{2}$

इसलिए, दी हुई सीमा

$$= \text{सीमा}_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{\pi - 2\sin^{-1}(\sin\theta)}$$

$$= \text{सीमा}_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{\pi - 2\theta}$$

अब, $\theta = \frac{\pi}{2} + y$ रखिए।

इसलिए, जब $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $y \to 0$

अतः, दी हुई सीमा

$$= \underset{y\to 0}{\text{सीमा}} \left[\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)} \right]$$

$$= \underset{y\to 0}{\text{सीमा}} \left[\frac{1-\cos y}{-2y} \right]$$

$$= \underset{y\to 0}{\text{सीमा}} \left[\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{-2y} \right] = -\frac{1}{2} \underset{y\to 0}{\text{सीमा}} \left[\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \times \sin\frac{y}{2} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \underset{\frac{y}{2}\to 0}{\text{सीमा}} \left[\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \right] \times \underset{\frac{y}{2}\to 0}{\text{सीमा}} \left[\sin\frac{y}{2} \right]$$

$\left(\text{क्योंकि जब } y \to 0, \frac{y}{2} \to 0\right)$

$$= -\frac{1}{2} \times 1 \times 0$$

$$= 0$$

(iii) यहाँ $x = \cos\theta$ लीजिए।

इसलिए, जब $x \to 1$, $\theta \to 0$

अतः, दी हुई सीमा

$$= \underset{\theta\to 0}{\text{सीमा}} \frac{1-\cos\theta}{\{\cos^{-1}(\cos\theta)\}^2}$$

$$= \underset{\theta\to 0}{\text{सीमा}} \left[\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \underset{\theta\to 0}{\text{सीमा}} \left\{ \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)\times\lim_{\frac{\theta}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)$$

(क्योंकि जब $\theta\to 0, \frac{\theta}{2}\to 0$)

$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1$$

$$=\frac{1}{2}$$

दाहरण 2 : क्या $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}}\ \sin^{-1}|x|$ का अस्तित्व है ?

ल : माना $f(x)=\sin^{-1}|x|$

तब, $f(x)=\begin{cases}\sin^{-1}x, \text{ यदि } x\geqslant 0\\ -\sin^{-1}x, \text{ यदि } x<0\end{cases}$

अब, वाम पक्ष सीमा (left hand limit)

$$=\underset{x\to 0-}{\text{सीमा}}\ f(x)=\underset{x\to 0-}{\text{सीमा}}\ \{-\sin^{-1}x\}=0$$

दक्षिण पक्ष सीमा (right hand limit)

$$=\underset{x\to 0+}{\text{सीमा}}\ f(x)=\underset{x\to 0+}{\text{सीमा}}\ \sin^{-1}x=0$$

अतः, दी हुई सीमा का अस्तित्व है ।

वाहरण 3 : फलन

$$f(x)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x-2}\right),$$

$x=2$ पर अर्थहीन है । क्या $f(x)$ के मान की $x=2$ पर इस प्रकार परिभाषा देना संभव है कि नर्परिभाषित फलन $x=2$ पर सतत हो जाए ?

ल : आइए, सबसे पहले फलन की $x=2$ पर सीमा की जाँच करें । दिया हुआ फलन निम्न प्रकार नया जा सकता है :

$$f(x)=\cot^{-1}(x-2)$$

ब यदि हम $x-2=z$ रखें, तो जब $x\to 2$, $z\to 0$ होता है । इस प्रकार, दिया हुआ फलन $\cot^{-1}z$ ो जाता है और हमें इस फलन की सीमा की जाँच करनी है, जब $z\to 0$ है । हम देखते हैं कि जब

$z \to 0$ –होता है, तब $\cot^{-1} z$ की सीमा का अस्तित्व नहीं होता, क्योंकि $\cot^{-1} z$ की मुख्य मान शाखा $0 < \cot^{-1} z < \pi$ है ।

अतः, दिए हुए फलन की वाम पक्ष सीमा का अस्तित्व नहीं है और इसलिए दिया हुआ फलन $x=2$ पर, $f(x)$ के किसी भी मान के लिए, सतत नहीं है ।

2.4 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज

अब हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलजों का अध्ययन करेंगे तथा उनसे संबंधित कुछ महत्वपूर्ण सूत्रों को निर्धारित करेंगे । आपको याद होगा कि किसी फलन $y=f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \text{सीमा}_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

द्वारा परिभाषित होता है, जब कि इस सीमा का अस्तित्व हो । अब हम कुछ मानक परिणामों को सिद्ध करेंगे, जो निम्नलिखित हैं :

(i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$

(iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$

(iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$ $\quad (-\infty < x < \infty)$

(v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad$ ($x > 1$, या $x < -1$)

(vi) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad$ ($x > 1$, या $x < -1$)

उपपत्ति :

(i) हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \text{सीमा}_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1} x}{h} \right\}$$

माना $\sin^{-1} x = y$ तथा $\sin^{-1}(x+h) = y+k$ है ।

इसलिए, जब $h \to 0$, $k \to 0$

साथ ही, $\quad x = \sin y$ तथा $x+h = \sin(y+k)$

अतः, $\quad h = \sin(y+k) - x = \sin(y+k) - \sin y$

इसलिए, $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \text{सीमा}_{k \to 0} \left\{ \frac{(y+k) - y}{\sin(y+k) - \sin y} \right\}$

$$= \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{k}{2\cos\left(y+\frac{k}{2}\right)\sin\frac{k}{2}} \right\}$$

$$= \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}} \times \frac{1}{\cos\left(y+\frac{k}{2}\right)} \right\}$$

$$= \lim_{\frac{k}{2}\to 0} \left\{ \frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}} \right\} \times \lim_{\frac{k}{2}\to 0} \left\{ \frac{1}{\cos\left(y+\frac{k}{2}\right)} \right\}$$

$$\left(\text{क्योंकि, जब } k\to 0, \frac{k}{2}\to 0\right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

वर्गमूल का धनात्मक मान इसलिए लिया गया है क्योंकि $\cos y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ में धनात्मक होता है।

इस प्रकार, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि यद्यपि $\sin^{-1} x$ का अस्तित्व $-1 \leq x \leq 1$ में है परंतु इसका अवकलज $-1 < x < 1$ में ही परिभाषित है।

(*ii*) यहाँ हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\cos^{-1}(x+h) - \cos^{-1} x}{h} \right\}$$

माना, $\cos^{-1} x = y$ तथा $\cos^{-1}(x+h) = y+k$ है।

इसलिए, जब $h\to 0$, $k\to 0$

साथ ही, $x = \cos y$ तथा $x+h = \cos(y+k)$

अतः, $h = \cos(y+k) - \cos y$

इसलिए, $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{k}{\cos(y+k) - \cos y} \right\}$

$$= \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{k}{-2\sin\left(y+\frac{k}{2}\right) \times \sin\frac{k}{2}} \right\}$$

$$=-1\times \underset{\frac{k}{2}\to 0}{\text{सीमा}}\left\{\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right\}\times \underset{\frac{k}{2}\to 0}{\text{सीमा}}\left\{\frac{1}{\sin\left(y+\frac{k}{2}\right)}\right\}$$

$$\left(\text{क्योंकि जब } k\to 0,\ \frac{k}{2}\to 0\right)$$

$$=-1\times\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

वर्गमूल का धनात्मक चिन्ह इसलिए लिया गया है क्योंकि $0<y<\pi$ में $\sin y$ धनात्मक है। इस प्रकार, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में भी $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$ का $-1<x<1$ में ही अस्तित्व है यद्यपि $\cos^{-1}x$, $-1\leq x\leq 1$ में परिभाषित है।

(*iii*) हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\underset{h\to 0}{\text{सीमा}}\left\{\frac{\tan^{-1}(x+h)-\tan^{-1}x}{h}\right\}$$

माना, $\tan^{-1}x=y$ तथा $\tan^{-1}(x+h)=y+k$ है।

इसलिए, जब $h\to 0$, $k\to 0$

साथ ही, $x=\tan y$ तथा $x+h=\tan(y+k)$

इसलिए, $h=\tan(y+k)-\tan y$

$$\text{इसलिए, } \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\underset{k\to 0}{\text{सीमा}}\left\{\frac{k}{\tan(y+k)-\tan y}\right\}$$

$$=\underset{k\to 0}{\text{सीमा}}\left\{\frac{k}{\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)}-\frac{\sin y}{\cos y}}\right\}$$

$$=\underset{k\to 0}{\text{सीमा}}\left\{\frac{k\cos y\cos(y+k)}{\cos y\sin(y+k)-\sin y\cos(y+k)}\right\}$$

$$=\underset{k\to 0}{\text{सीमा}}\left\{\frac{k\cos y\cos(y+k)}{\sin(y+k-y)}\right\}$$

$$=\underset{k\to 0}{\text{सीमा}}\left(\frac{k}{\sin k}\right)\times\underset{k\to 0}{\text{सीमा}}\{\cos y\cos(y+k)\}$$

$$=1\times\cos^2 y=\frac{1}{\sec^2 y}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

इस प्रकार, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

अन्य तीनों बचे हुए परिणामों की उपपत्ति इसी प्रकार दी जा सकती हैं तथा इन्हें पाठक के लिए छोड़ दिया गया है।

2.5 शृंखला नियम का प्रयोग

हमने प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज, प्रथम सिद्धांत (first principle) (अर्थात्, डेल्टा विधि) से प्राप्त किए हैं। अब हम यह दिखाएँगे कि ये परिणाम अवकलजों के शृंखला नियम (Chain Rule) के प्रयोग से भी प्राप्त किए जा सकते हैं।

आइए फलन

$$y=\sin^{-1}x$$

पर विचार करें।

उपर्युक्त समीकरण से हम

$$x=\sin y$$

प्राप्त करते हैं। x के सापेक्ष दोनों पक्षों को अवकलित करने पर, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$1=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\text{या, }\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (-1<x<1)$$

इसी प्रकार, हम अन्य प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात कर सकते हैं।

अब हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध कुछ फलनों के अवकलज ज्ञात करने पर विचार करेंगे।

2.6 हल उदाहरण

उदाहरण 4 : यदि $y=\tan^{-1}\left[\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right]$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$y=\tan^{-1}\left\{\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\right\}$$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4}-x$$

अतः, $$\frac{dy}{dx}=-1$$

उदाहरण 5 : यदि $y=\sin\left\{2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right\}$ हो, तो दिखाइए कि

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ है।

हल : हम दिए हुए फलन में $x=\cos\theta$ रखते हैं। तब,

$$y=\sin\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)\right]$$

$$=\sin\left[2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right\}\right]$$

$$=\sin\left[2\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)=\sin\theta$$

$$=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$$

इसलिए, $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(-2x\right)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

***उदाहरण 6 :** यदि $y=\sin^{-1}(x^2\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^4})$ हो, तो दिखाइए कि

$\frac{dy}{dx}-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ है।

हल : माना $x^2=\sin\theta$ तथा $x=\sin\phi$ है।

तब, $$y=\sin^{-1}\left(\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\phi}+\sin\phi\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}(\sin\theta\cos\phi+\sin\phi\cos\theta)$$

$$=\sin^{-1}\{\sin(\theta+\phi)\}$$

$$=\theta+\phi$$

$$=\sin^{-1}x^2+\sin^{-1}x$$

अतः, $$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

अन्य तीनों बचे हुए परिणामों की उपपत्ति इसी प्रकार दी जा सकती हैं तथा इन्हें पाठक के लिए छोड़ दिया गया है।

2.5 शृंखला नियम का प्रयोग

हमने प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज, प्रथम सिद्धांत (first principle) (अर्थात्, डेल्टा विधि) से प्राप्त किए हैं। अब हम यह दिखाएँगे कि ये परिणाम अवकलजों के शृंखला नियम (Chain Rule) के प्रयोग से भी प्राप्त किए जा सकते हैं।

आइए फलन

$$y=\sin^{-1}x$$

पर विचार करें।

उपर्युक्त समीकरण से हम

$$x=\sin y$$

प्राप्त करते हैं। x के सापेक्ष दोनों पक्षों को अवकलित करने पर, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$1=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\text{या,}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (-1<x<1)$$

इसी प्रकार, हम अन्य प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात कर सकते हैं।

अब हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध कुछ फलनों के अवकलज ज्ञात करने पर विचार करेंगे।

2.6 हल उदाहरण

उदाहरण 4 : यदि $y=\tan^{-1}\left[\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right]$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$y=\tan^{-1}\left\{\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\right\}$$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4}-x$$

अतः, $$\frac{dy}{dx}=-1$$

उदाहरण 5 : यदि $y=\sin\left\{2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right\}$ हो, तो दिखाइए कि

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ है।

हल : हम दिए हुए फलन में $x=\cos\theta$ रखते हैं। तब,

$$y=\sin\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)\right]$$

$$=\sin\left[2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right\}\right]$$

$$=\sin\left[2\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)=\sin\theta$$

$$=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$$

इसलिए, $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(-2x\right)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

***उदाहरण 6 :** यदि $y=\sin^{-1}(x^2\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^4})$ हो, तो दिखाइए कि

$\frac{dy}{dx}-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ है।

हल : माना $x^2=\sin\theta$ तथा $x=\sin\phi$ है।

तब, $$y=\sin^{-1}\left(\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\phi}+\sin\phi\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}(\sin\theta\cos\phi+\sin\phi\cos\theta)$$

$$=\sin^{-1}\{\sin(\theta+\phi)\}$$

$$=\theta+\phi$$

$$=\sin^{-1}x^2+\sin^{-1}x$$

अतः, $$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

या, $$\frac{dy}{dx}-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

इस प्रकार, परिणाम सिद्ध हो जाता है।

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित सीमाओं को ज्ञात कीजिए :

(i) $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}} \frac{\tan^{-1}x}{x}$ (ii) $\underset{x\to 1}{\text{सीमा}} \frac{1-\sqrt{x}}{(\cos^{-1}x)^2}$

(iii) $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin^{-1}x}$ (iv) $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}} \frac{\tan^{-1}2x}{\sin 3x}$

(v) $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}} \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}\,(\sin^{-1}x)^3}$ (vi) $\underset{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}}{\text{सीमा}} \frac{x-\cos(\sin^{-1}x)}{1-\tan(\sin^{-1}x)}$

(vii) $\underset{x\to 0}{\text{सीमा}} \frac{\sin^{-1}x-2x}{\sin^{-1}x+2\sin(\frac{1}{2}\sin^{-1}x)\{3-4\sin^2(\frac{1}{2}\sin^{-1}x)\}}$

2. $\underset{x\to\infty}{\text{सीमा}} \frac{2}{\pi}\tan^{-1}(ax)$ के मान ज्ञात कीजिए, जब

(i) $a>0$ तथा (ii) $a<0$ है।

3. फलन $f(x)$, जो निम्न प्रकार से परिभाषित है, के सातत्य का $x=0$ पर वर्णन कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}\sin^{-1}|x|\cos\frac{1}{x}, & \text{जब } x\neq 0\\ 0, & \text{जब } x=0\end{cases}$$

4. जाँच कीजिए कि $x=0$ पर निम्नलिखित फलन सतत है या नहीं :

$$f(x)=\frac{x^4+x^3+2x^2}{\tan^{-1}x}, x\neq 0$$

तथा

$$f(0)=0$$

5. डेल्टा विधि (अर्थात्, प्रथम सिद्धांत) से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin^{-1}(\sqrt{x}), (0<x<1)$ (ii) $\frac{\sin^{-1}x}{x}, (x\neq 0, x\neq\pm 1)$

(iii) $x\,\text{cosec}^{-1}x, (x>1)$ (iv) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right), (1<x<2)$

(v) $\cot^{-1}(x^2)$

6. x के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए तथा परिणामों को सरलतम बीजीय फलनों के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}(2x^2-1), (x>0)$

(*iii*) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, $(-1<x<1)$ (*iv*) $\sin^{-1}(3x-4x^3)$, $\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$

(*v*) $\cos^{-1}(4x^3-3x)$, $\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$ (*vi*) $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{1-2x}\right)$, $\left(-1<x<\frac{1}{2}\right)$

(*vii*) $\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)$, $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ (*viii*) $\sin(2\sin^{-1}x)$

(*ix*) $\cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$ (*x*) $\cot^{-1}(\operatorname{cosec} x+\cot x)$

(*xi*) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ (*xii*) $\cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(*xiii*) $\sec^{-1}\left\{\frac{x^2+1}{x^2-1}\right\}$, $(0<x<1)$ (*xiv*) $\tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)$, $\left(0<x<\frac{a}{b}\right)$

(*xv*) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $(-1<x<1)$ (*xvi*) $\sec(\tan^{-1}x)$

(*xvii*) $\tan(\sin^{-1}x)$

7. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(1+x^2)}$ है।

8. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ है।

9. यदि $y=\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$ हो जहाँ $0<x<\frac{\pi}{2}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}$, x से स्वतंत्र है।

10. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}x$ के सापेक्ष, $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ का अवकलज, x से स्वतंत्र है।

11. सिद्ध कीजिए कि जब $-1<x<1$, तो $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष, $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ का अवकलज 1 है।

12. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष, $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$, $(x>0)$ का अवकलज, x के सापेक्ष $\ln(x^2)$ के अवकलज के बराबर है।

13. यदि $y=\tan^{-1}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}}\right)$ हो जहाँ $0<ax<1$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}$, a से स्वतंत्र है।

14. उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा समीकरण

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2} = a\ (x-y)$$

को प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध एक समीकरण में व्यक्त करते हुए, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$ है।

15. यदि $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $2\dfrac{dy}{dx}+1=0$ है।

16. यदि $y=\sin^{-1}\left(2ax\sqrt{1-a^2x^2}\right)$ हो जहाँ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<ax<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2=\dfrac{y_1^2}{4+x^2y_1^2}$ है, जहाँ $y_1=\dfrac{dy}{dx}$ है।

17. यदि $y=\cos^{-1}\left(\dfrac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos x=\dfrac{4-5y_1}{3y_1}$ है, जहाँ $y_1=\dfrac{dy}{dx}$ है।

18. यदि $\tan y=\dfrac{2t}{1-t^2}$ तथा $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ हो जहाँ $-1<t<1$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx}=1$ है।

एकक III

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के समाकल

3.1 भूमिका

इस एकक में, हम प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध कुछ फलनों के समाकलों (integrals) पर विचार करेंगे। क्योंकि पुस्तक IV में समाकलन के विस्तृत सिद्धांत तथा समाकलों को ज्ञात करने की विभिन्न विधियाँ स्पष्ट की जा चुकी हैं, अतः यहाँ पर हम केवल इस प्रकार के फलनों के समाकल ज्ञात करने के कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे तथा समाकलन की विभिन्न तकनीकों को, कुछ प्रश्नों को हल करते समय, स्पष्ट करेंगे। समाकलों के मानक परिणामों को सत्य मानते हुए, जहाँ भी उनकी आवश्यकता होगी, उनका प्रयोग किया जाएगा। हम यह देखेंगे कि सभी प्रतिलोम त्रिकोण-मितीय फलनों को भागों द्वारा समाकलित (integrated by parts) किया जा सकता है।

3.2 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : $I=\int \sin^{-1}x\, dx$ का मान निकालिए।

हल : $\sin^{-1}x$ को प्रथम फलन तथा 1 को द्वितीय फलन लेने पर तथा भागों द्वारा समाकलित करने पर, हम $I=x \sin^{-1} x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ प्राप्त करते हैं। अब फलन $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ को समाकलित करने के लिए हम $1-x^2=z^2$ रखते हैं, जिससे $xdx=-zdz$* है।

---

* ध्यान दीजिए कि $\int f(x)dx$ के प्रकार के समाकल में $x=\phi(z)$ के प्रकार का प्रतिस्थापन इस समाकल को $\int f(\phi(z))\phi'(z)dz$ के प्रकार के समाकल में परिवर्तित कर देता है। दूसरे शब्दों में, इस प्रतिस्थापन के कारण हमें मूल समाकल में संकेत dx को $\phi'(z)dz$ से बदलना पड़ता है। संकेत dx तथा $\phi'(z)dz$ क्रमशः चर x तथा फलन $\phi(z)$ के **अवकल (differentials)** कहलाते हैं। "अवकल समीकरणों" (Differential Equations) के एकक में अवकल की संकल्पना के विषय में अधिक विस्तृत रूप से बताया जाएगा। इस समय आपको केवल इतना याद रखना है कि फलन $f(x)$ का अवकल, जिसे संकेत $df(x)$ से निरूपित करते हैं, x के सापेक्ष $f(x)$ के अवकलज तथा स्वतंत्र चर x के अवकल (जो कि वास्तव में अपनी वृद्धि $\triangle x$ के बराबर है) के गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जाता है, अर्थात्, $df(x)=f^1(x)dx$ है। उपर्युक्त प्रतिस्थापन $1-x^2=z^2$ में, हमने वास्तव में समीकरण के दोनों पक्षों में उनसे संबद्ध चरों के सापेक्ष अवकल लिए हैं। प्रतिस्थापन के प्रत्येक प्रश्न में आपको इसी विधि का अनुसरण करना चाहिए।

$$\text{इसलिए,} -\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{zdz}{z}$$

$$= \int dz$$

$$= z + c$$

$$= \sqrt{1-x^2} + c$$

अतः, $I = x \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

इसी प्रकार, $\int \cos^{-1} x \, dx$ का मान ज्ञात किया जा सकता है।

टिप्पणी : समाकल के अंत में जोड़े हुए स्थिरांक c को समाकलन का स्वेच्छिक स्थिरांक माना जाएगा।

उदाहरण 2 : $I = \int \tan^{-1} x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : भागों द्वारा समाकलित करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$I = x \tan^{-1}x - \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$= x \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$= x \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

इसी प्रकार, हम $\int \cot^{-1}x \, dx$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : $I = \int \sec^{-1}x \, dx, (x > 1)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : भागों द्वारा समाकलित करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$I = x \sec^{-1}x - \int \frac{xdx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= x \sec^{-1}x - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ का मान ज्ञात करने के लिए $x = \sec \theta$ रखिए, जिससे $dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$ होगा।

$$\text{इसलिए,} \quad -\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\sec\theta \tan\theta \, d\theta}{\tan\theta}$$

$$= -\int \sec\theta \, d\theta$$
$$= -\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$
$$= -\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

अतः, $I = x \sec^{-1}x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$

इसी प्रकार, हम $\int \operatorname{cosec}^{-1} x \, dx$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों से संबद्ध अधिक जटिल फलनों को उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा समाकलित किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

उदाहरण 4 : $\int \tan^{-1}\left(\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : आइए समाकल को I से व्यक्त करें।

$x = \tan\theta$ रखिए, जिससे $dx = \sec^2\theta \, d\theta$ है।

अतः,
$$I = \int \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right) \sec^2\theta \, d\theta$$
$$= \int \tan^{-1}(\tan 3\theta) \sec^2\theta \, d\theta$$
$$= \int 3\theta \sec^2\theta \, d\theta$$
$$= 3\int \theta \sec^2\theta \, d\theta$$
$$= 3[\theta \tan\theta - \int \tan\theta \, d\theta] \quad \text{(भागों द्वारा समाकलन से)}$$
$$= 3[\theta \tan\theta - \ln|\sec\theta|] + c$$
$$= 3x \tan^{-1}x - 3\ln\sqrt{1+x^2} + c$$
$$= 3x \tan^{-1}x - \frac{3}{2}\ln(1+x^2) + c$$

उदाहरण 5 : $\dfrac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ को x के सापेक्ष समाकलित कीजिए।

हल : माना $I = \int \dfrac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

अब हम $\sin^{-1}x = z$ रखते हैं, जिससे

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz \text{ है।}$$

इसलिए,
$$I = \int z \sin z \, dz$$
$$= -z\cos z + \int \cos z \, dz \quad \text{(भागों द्वारा समाकलन से)}$$
$$= -z\cos z + \sin z + c$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + x + c \quad (\text{क्योंकि } \sin z = x)$$

उदाहरण 6 : $I=\int \cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम $x=\cos\theta$ रखते हैं, जिससे $dx=-\sin\theta\, d\theta$ है।

इसलिए, $$I=-\int \cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\}\sin\theta\, d\theta$$

$$=-\int\cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right\}\sin\theta\, d\theta$$

$$=-\int\cos\left[2\cot^{-1}\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]\sin\theta\, d\theta$$

$$\left\{\text{क्योंकि } \tan\frac{\theta}{2}=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$=-\int\cos\left[2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]\sin\theta\, d\theta$$

$$=-\int\cos(\pi-\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$=\int\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 2\theta\, d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2\theta}{2}+c=-\frac{1}{4}(2\cos^2\theta-1)+c$$

$$=-\frac{1}{4}(2x^2-1)+c=-\frac{1}{2}x^2+c'$$

जहाँ $c'=c+\frac{1}{4}$ एक स्वेच्छिक स्थिरांक है।

उदाहरण 7 : सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx=\frac{\pi^2}{72}$ है।

हल : हम $$\sin^{-1}x=z \qquad (1)$$
रखते हैं।

इसलिए, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dz$

हम देखते हैं कि 0 तथा $\frac{1}{2}$, x की सीमाएँ हैं। अब (1) से z की तदनुरूपी सीमाएँ ज्ञात करनी

हैं। हम (1) से देखते हैं कि जब $x=0$, तब $z=0$ है तथा जब $x=\frac{1}{2}$, तब $z=\frac{\pi}{6}$ है। अतः,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} z\,dz=\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi^2}{72}$$

टिप्पणी : उपर्युक्त निश्चित समाकल, पहले x के पदों में अनिश्चित समाकल ज्ञात करके फिर x की सीमाएँ 0 तथा $\frac{1}{2}$ रखकर भी ज्ञात किया जा सकता है। अधिकतर अन्य निश्चित समाकलों को भी इसी प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

***उदाहरण 8** : प्रथम चतुर्थांश (quadrant) में, वक्र (curve) $y=\cos^{-1}x$, $0\leqslant y\leqslant\pi$ तथा निर्देशांक अक्षों द्वारा परिसीमित क्षेत्र (bounded region) का क्षेत्रफल (area) ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $x=1$ पर $\cos^{-1}x=0$ है, अतः दी हुई वक्र x-अक्ष को $x=1$ पर काटती है।

अतः, वाँछित क्षेत्रफल

$$=\int_0^1 \cos^{-1}x\,dx$$

हम $x=\cos t$ रखते हैं। इसलिए, $dx=-\sin t\,dt$ है।

जब $x=0$, तब $t=\frac{\pi}{2}$ है तथा जब $x=1$, तब $t=0$ है।

इसलिए, $$=\int_0^1 \cos^{-1}x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 t\sin t\,dt$$

$$=\left[t\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^0-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t\,dt$$

$$=-\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^0$$

$$=1$$

इसलिए, वाँछित क्षेत्रफल 1 है।

प्रश्नावली 3.1

1. x के सापेक्ष, निम्नलिखित फलनों को समाकलित कीजिए :

(*i*) $x \sin^{-1} x$ (*ii*) $x^2 \sin^{-1} x$

(*iii*) $x^2 \tan^{-1} x$ (*iv*) $x^3 \tan^{-1} x$

(*v*) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), (x>1)$ (*vi*) $\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

(*vii*) $\tan^{-1}(\sqrt{x})$ (*viii*) $x^2 \tan^{-1}(3x)$

(*ix*) $x^3 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ (*x*) $(\sin^{-1} x)^2$

(*xi*) $x(\tan^{-1} x)^2$ (*xii*) $x \tan^{-1}(2x+3)$

(*xiii*) $\frac{\sin^{-1}x}{x^2}$ (*xiv*) $\frac{\tan^{-1}x}{x^2}$

(*xv*) $\frac{x^3 \sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}$ (*xvi*) $\frac{\sin^{-1}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(*xvii*) $\frac{\sin^{-1}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}$ (*xviii*) $\frac{\ln(\sec^{-1} x)}{x\sqrt{x^2-1}}$

(*xix*) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

2. सिद्ध कीजिए कि

(*i*) $\int_0^1 \sin^{-1} x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

(*ii*) $\int_0^1 x(\tan^{-1} x)^2 \, dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{1}{2} \ln 2$

(*iii*) $\int_0^a \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = 2a \tan^{-1} a - \ln(1+a^2)$

3. $\int_0^1 (\cos^{-1}x)^2 \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. वक्र $y = \operatorname{cosec}^{-1}x$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x=1$ और $x=\sqrt{2}$ द्वारा परिसीमित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. प्रथम चतुर्थांश में, वक्र $y = \cot^{-1}x$, $0<y<\pi$, निर्देशांक अक्षों तथा रेखा $x=1$ द्वारा परिसीमित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अवकल समीकरण और उनके हल

एकक IV

अवकल समीकरण

4.1 भूमिका

आपको याद होगा कि पिछली कक्षाओं में हमने बीजीय तथा त्रिकोणमितीय समीकरणों का अध्ययन किया था। हमने इनके हलों को ज्ञात करने की विधियों तथा इनके ज्यामितीय महत्व के बारे में भी अध्ययन किया था। इस एकक में, हम एक **भिन्न (different)** प्रकार के समीकरणों के बारे में अध्ययन करेंगे जिन्हें **अवकल समीकरण (differential equations)** कहा जाता है। ये समीकरण भौतिक विज्ञान, जीव विज्ञान, इन्जीनियरी तथा सामाजिक विज्ञान के अन्तर्गत अनेक प्रकार की स्थितियों में हमारे सम्मुख उत्पन्न होती हैं। अवकल समीकरण की परिभाषा देने से पहले, हम यह स्पष्ट करेंगे कि शब्द "अवकल" (**differential**) से हमारा क्या तात्पर्य है।

4.2 अवकल

आइये एक फलन $y=f(x)$ पर विचार करें। x के सापेक्ष $f(x)$ का अवकलज $f'(x)$ है तथा हम

$$\underset{\triangle x\to 0}{\text{सीमा}} \frac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x)$$

लिखते हैं, जहां $\triangle y$ तथा $\triangle x$ क्रमशः y तथा x में छोटी वृद्धियां (increments) हैं। ऊपर से यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x)+\text{A}$$

जहां A, $\triangle x$ [जिसे **अनंत सूक्ष्म (infinitesimal)** कहते हैं] का एक फलन है, तथा जब $\triangle x\to 0$, तब $\text{A}\to 0$ है।

अतः, $\triangle y=f'(x)\ \triangle x+\text{A}\triangle x$

क्योंकि A तथा $\triangle x$ दोनों बहुत छोटे हैं, इसलिए इनका गुणनफल A $\triangle x$, गुणनफल $f'(x)\triangle x$ की तुलना में एक उपेक्षणीय राशि होगी, अर्थात् इसे छोड़ा जा सकता है। इसलिये, भाग $f'(x)\ \triangle x$ को $\triangle y$ का **मुख्य भाग (principal part)** कहते हैं। मुख्य भाग $f'(x)\ \triangle x$ को फलन $y=f(x)$ के **अवकल (differential)** के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा इसे चिन्ह **dy** से निरूपित किया जाता है। अतः,

$$dy=f'(x)\ \triangle x \qquad (1)$$

अब हम स्वतन्त्र चर (independent variable) x का अवकल ज्ञात करेंगे। हम (1) में $y=f(x)=x$ रखते हैं। क्योंकि $f'(x)=1$ है, इसलिए (1) से हम

$$dx=\triangle x \tag{2}$$

प्राप्त करते हैं। इस प्रकार, **स्वतन्त्र चर x का अवकल उसकी वृद्धि $\triangle x$ के बराबर है।**

(1) में $\triangle x=dx$ रखने पर, हम

$$dy=f'(x)dx \tag{3}$$

प्राप्त करते हैं। अतः **किसी फलन y=f(x) का अवकल, उस फलन के अवकलज तथा स्वतन्त्र चर के अवकल के गुणनफल से परिभाषित होता है।**

यदि हम फलन $y=f(x)$ के अवकल का अवकल लें तो इस अवकल को **द्वितीय क्रम का अवकल** (**second order differential**) कहते हैं तथा इसे d^2y से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार, $d(dy)=d^2y$ है। इसी प्रकार, तृतीय, चतुर्थ इत्यादि क्रमों के अवकल परिभाषित किये गए हैं तथा इन्हें क्रमशः d^3y, d^4y, इत्यादि से व्यक्त किया जाता है।

टिप्पणी : ऊपर (3) से हम देखते हैं कि

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{y \text{ का अवकल}}{x \text{ का अवकल}}$$

अतः, किसी फलन के अवकलज को दोनों अवकलों का **अनुपात (ratio)** माना जा सकता है।

इस बात से आश्चर्य हो सकता है कि हम एक ही संकेतन $\frac{dy}{dx}$ को दो भिन्न अर्थ दे रहे हैं। अवकलज की परिभाषा देते समय हमने इसे अनुपात $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ की सीमा, जब $\triangle x \to 0$ है, के रूप में परिभाषित किया था। इस प्रकार, इस सीमा को व्यक्त करने के लिए $\frac{dy}{dx}$ को एक संकेत (एक अनुपात नहीं) के रूप में लिया गया था। अब हम उसी संकेत को एक दूसरा अर्थ दे रहे हैं, अर्थात्, उसे दो अवकलों का अनुपात्त मान रहे हैं। इस भ्रम को दूर करने के लिए कुछ लेखक, अवकलों के अनुपात को $\frac{\delta y}{\delta x}$ से निरूपित करते हैं तथा संकेत $\frac{dy}{dx}$ को केवल अवकलज के लिए रखते हैं। परन्तु जैसा कि हम देख चुके हैं कि दोनों अवकलों का अनुपात, अवकलज $\frac{dy}{dx}$ के समान है, क्योंकि इनमें से प्रत्येक $f'(x)$ के बराबर है। इसलिए यदि हम दोनों के लिये एक ही संकेत $\frac{dy}{dx}$ का प्रयोग करें, तो किसी प्रकार के भ्रम की कोई सम्भावना नहीं है।

4.3 अवकल समीकरण की परिभाषा, क्रम तथा घात

अवकल समीकरण एक ऐसी समीकरण होती है जिसमें अवकल या अवकल गुणांक (अवकलज) सम्बद्ध होते हैं। कुछ अवकल समीकरणों के उदाहरण निम्नलिखित हैं :

$$\frac{dy}{dx}=\sin x \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{2}$$

$$dx+dy=0 \tag{3}$$

$$x^2dx=y^2dy \tag{4}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=0 \tag{5}$$

$$y=x\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{6}$$

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=2 \tag{7}$$

$$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{8}$$

अध्ययन को सुगम बनाने के लिए, अवकल समीकरणों को उनके **क्रम (order)** तथा **घात (degree)** के अनुसार वर्गीकृत किया जाता है। **एक अवकल समीकरण का क्रम उसमें निहित अधिकतम अवकलज या अवकल का क्रम होता है।** इस प्रकार, समीकरण (1), (3), (4), (6) तथा (8) **प्रथम क्रम (first order)** की हैं जबकि समीकरण (2), (5) तथा (7) **द्वितीय क्रम (second order)** की हैं।

एक अवकल समीकरण की घात उस समीकरण में अधिकतम क्रम वाले अवकलज (या अवकल) की घात* होती है जबकि उस समीकरण को अवकलजों के सन्दर्भ में करणी (radicals) तथा भिन्नों (fractions) से मुक्त कर लिया गया हो।

अवकल समीकरण, (1), (2), (3) और (4) **प्रथम घात (first degree)** की तथा समीकरण (5), (6), (7) और (8), **द्वितीय घात (second degree)** की हैं। इस एकक में, हम केवल प्रथम घात की कुछ विशेष अवकल समीकरणों के बारे में ही अध्ययन करेंगे।

4.4 अवकल समीकरण का हल

अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=3$$

पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि $y=3x$, $y=3x+1$, $y=3x-2$, इत्यादि, इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। हम कहते हैं कि ये इस अवकल समीकरण के हल **(solutions)** हैं। व्यापक रूप में $y=3x+c$, जहाँ c एक स्वेच्छिक स्थिरांक है, इस समीकरण को सन्तुष्ट करता है। हम कहते हैं कि $y=3x+c$ उपर्युक्त अवकल समीकरण का **व्यापक हल (general solution)** है। c के विभिन्न मानों

*एक अवकल समीकरण में अधिकतम क्रम वाले अवकलज (या अवकल) की घात उस अवकलज (या अवकल) का अधिकतम धनात्मक पूर्णांकीय घातांक (positive integral exponent) होती है।

से प्राप्त हलों को **विशिष्ट हल (particular solutions)** कहते हैं। इस प्रकार, यह स्पष्ट है कि एक अवकल समीकरण के अनन्त हल हो सकते हैं।

आइये एक द्वितीय क्रम की अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x$$

पर विचार करें। यह समीकरण

$$y= x-\sin x,$$
$$y=2x-\sin x+1,$$
$$y=3x-\sin x-5,$$

इत्यादि द्वारा सन्तुष्ट हो जाती है।

व्यापक रूप में,

$$y=c_1x-\sin x+c_2$$

जहां c_1 तथा c_2 दो **स्वतन्त्र* (independent)** स्वेच्छिक स्थिरांक हैं, दिये हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है। स्पष्ट है, $y=c_1x-\sin x+c_2$ उपर्युक्त अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

एक अवकल समीकरण के हल को, उस समीकरण के चरों को सम्बन्धित करने वाले ऐसे सम्बन्ध से परिभाषित किया जाता है जिसमें उनके अवकलज न हों और वह दी हुई अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करे, अर्थात्, जिससे दी हुई अवकल समीकरण, तर्कों द्वारा प्राप्त की जा सकती हो।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि **किसी अवकल समीकरण का हल, जिसमें स्वतन्त्र स्वेच्छिक स्थिरांकों की संख्या अवकल समीकरण के क्रम के बराबर है, उस अवकल समीकरण का व्यापक (या सम्पूर्ण) हल होता है।**

व्यापक हल के स्वेच्छिक स्थिरांकों के विशिष्ट मानों से प्राप्त हल **अवकल समीकरण का एक विशिष्ट हल होता है।**

4.5 अवकल समीकरण हल करने की विधि

पिछले अनुच्छेद में हमने कुछ अवकल समीकरणों के कुछ हलों के बारे में विचार किया था। अब हम इसकी विवेचना करेंगे कि ये हल कैसे प्राप्त किये जा सकते हैं। वास्तव में, विभिन्न प्रकार के अवकल समीकरणों के हल ज्ञात करने की कई तकनीकें हैं। हम यहाँ पर केवल तीन सरल प्रकार की अवकल समीकरणों (या अवकल समीकरणों जो सरलता से इस प्रकार की समीकरणों में बदली जा सकें)

---

*अवकल समीकरण के व्यापक हल में दो स्वेच्छिक स्थिरांकों को तब **स्वतन्त्र** कहा जाता है जबकि इस हल के समतुल्य कोई ऐसा सम्बन्ध प्राप्त करना बिलकुल संभव न हो जिसमें स्वेच्छिक स्थिरांकों की संख्या पहले से कम हो। उदाहरणार्थ, हल $x+c_1=\ln(c_2y)$ में दोनों स्वेच्छिक स्थिरांक c_1 और c_2 स्वतन्त्र नहीं हैं क्योंकि इस समीकरण को $c_2y=e^{c_1}\cdot e^x$, अर्थात् $y=Ae^x$ (जहाँ $A=\frac{e^{c_1}}{c_2}$ है) के रूप में लिख सकते हैं और इसमें केवल एक ही स्वेच्छिक स्थिरांक A है।

के हल ज्ञात करने तक अपने को सीमित रखेंगे । ये नीचे दी जा रही हैं :

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\,g(y) \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x) \tag{3}$$

(1) के प्रकार की अवकल समीकरण का हल* प्राप्त करने के लिए, हम पहले समीकरण के दोनों पक्षों का अवकल dx से गुणा करते हैं, जिससे

$$dy=f(x)\ dx$$

प्राप्त होता है । फिर हम व्यापक हल ज्ञात करने के लिए, दोनों पक्षों को समाकलित करते हैं । इस प्रकार, (1) का व्यापक हल

$$y=\int f(x)\ dx+c$$

से दिया जा सकता है, जहाँ c एक स्वेच्छिक स्थिरांक है ।

(2) के प्रकार की अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के लिए, हम पहले समीकरण के दोनों पक्षों को dx से गुणा करते हैं तथा फिर इसको

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)\ dx \tag{4}$$

के रूप में लिखते हैं । हम देखते हैं कि सभी व्यंजक जिनमें y है एक पक्ष में हैं तथा वे जिनमें x है, दूसरे पक्ष में हैं । हम कहते हैं कि हमने **चरों को पृथक्**** **(separate) कर दिया है** । अब हम (4) के दोनों पक्षों को समाकलित करेंगे, जिससे हमें निम्न हल प्राप्त होगा :

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\ dx+c$$

(दोनों पक्षों में दो स्वेच्छिक स्थिरांकों को जोड़ने की कोई आवश्यकता नहीं है, क्योंकि इन दोनों स्वेच्छिक स्थिरांकों को संयोजित कर एक नया स्वेच्छिक स्थिरांक प्राप्त किया जा सकता है ।)

(3) के प्रकार की अवकल समीकरण, जो एक द्वितीय क्रम की अवकल समीकरण है, को निम्न प्रकार से एक प्रथम क्रम की अवकल समीकरण में परिवर्तित करके हल किया जा सकता है :

माना, $$\frac{dy}{dx}=v \tag{5}$$

क्योंकि y, x का एक फलन है अत: v भी x का एक फलन होना चाहिए । (5) के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम

---

*जब तक कि अन्यथा कहा न जाए, आगे शब्द "हल" से हमारा तात्पर्य "व्यापक हल" से होगा ।

कुछ लेखक इसे **"चरों को पृथक करने की विधि" (method of separation of variables) कहते हैं ।

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dv}{dx}$$

प्राप्त करते हैं। अतः, दी हुई अवकल समीकरण

$$\frac{dv}{dx}=f(x)$$

हो जाती है। इस समीकरण के दोनों पक्षों का अवकल dx से गुणा करने पर, हम

$$dv=f(x)\ dx$$

प्राप्त करते हैं। इसे समाकलित करने पर, हम

$$v=\int f(x)\ dx+c_1$$
$$=\phi(x)+c_1 \qquad (6)$$

प्राप्त करते हैं, जहाँ $\phi(x)=\int f(x)dx$ है तथा c_1, समाकलन का स्थिरांक है।

(5) से v का मान (6) में रखने पर, हम

$$\frac{dy}{dx}=\phi(x)+c_1$$

प्राप्त करते हैं। इस समीकरण के दोनों पक्षों का अवकल dx से गुणा करने पर, हम

$$dy=\phi(x)dx+c_1\ dx$$

प्राप्त करते हैं। पुनः समाकलित करने पर, हम

$$y=\int\phi(x)dx+c_1\int dx+c_2$$
$$=\psi(x)+c_1x+c_2 \qquad (7)$$

प्राप्त करते हैं, जहाँ $\psi(x)=\int\phi(x)dx$ है तथा c_2 समाकलन का स्थिरांक है जो c_1 से स्वतन्त्र है। समीकरण (7), दी हुई अवकल समीकरण का वाँछित व्यापक हल है।

टिप्पणी : हल ज्ञात करने की उपर्युक्त विधियाँ अवकल की संकल्पना पर आधारित हैं। $\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ को अवकलजों के संकेत मानकर भी इन अवकल समीकरणों को हल किया जा सकता है। क्योंकि समाकलन (integration) को अवकलन (differentiation) के प्रतिलोम (inverse) के रूप में परिभाषित किया गया है, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \text{ हो,}$$

तो $$y=\int f(x)dx+c \text{ होगा।}$$

साथ ही, यदि $$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$$

अर्थात्, यदि $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x) \text{ हो,}$$

तो $$\frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+c_1$$
$$=\phi(x)+c_1 \text{ होगा,}$$

जहाँ, $\phi(x)=\int f(x)dx$ है ।

इसलिये, $y=\int[\phi(x)+c_1]dx+c_2$

$=\int\phi(x)dx+c_1x+c_2$

$=\psi(x)+c_1x+c_2$

जहाँ $\psi(x)=\int\phi(x)dx$ है ।

4.6 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2+1}$ को हल कीजिए ।

हल : समीकरण से, हम

$$dy=\frac{x}{x^2+1}dx$$

प्राप्त करते हैं । दोनों पक्षों को समाकलित करने पर, हम

$$\int dy=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

या, $$y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

प्राप्त करते हैं, जहाँ c समाकलन का स्थिरांक है ।

उदाहरण 2 : $\frac{dy}{dx}=\sin^3 x\cos^2 x+x\,e^x$ को हल कीजिए ।

हल : दोनों पक्षों को अवकल dx से गुणा करने पर, हम

$$dy=(\sin^3 x\cos^2 x+x\,e^x)dx$$

प्राप्त करते हैं । दोनों पक्षों को समाकलित करने पर, हम

$$\int dy=\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx+\int x\,e^x dx$$

प्राप्त करते हैं ।

अब, $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x\,dx$

$=\int\cos^2 x\sin x\,dx-\int\cos^4 x\sin x\,dx$

माना $\cos x=t$ है । इसलिए $-\sin x\,dx=dt$ होगा ।

इसलिए, $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx=-\int t^2dt+\int t^4dt$

$$=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}$$

$$=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}$$

साथ ही, $\int xe^x dx=xe^x-\int 1.e^x dx$ (भागों द्वारा समाकलन से)

$=xe^x-e^x$

$=(x-1)e^x$

अत: वाँछित हल

$$y = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + (x-1)\, e^x + c \text{ है ।}$$

उदाहरण 3 : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ को हल कीजिए ।

हल : हम दी हुई समीकरण को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$dy = \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

दोनों पक्षों को समाकलित करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$y = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

अर्थात्,

$$y = \int \frac{dx}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 2x + \cos^2 2x - \frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 2x \, dx}{1 + \frac{1}{2}\tan^2 2x}$$

$\tan 2x = z$ रखिये । अत:, $2\sec^2 2x \, dx = dz$ होगा ।

इस प्रकार,

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{1 + \frac{1}{2} z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{2 + z^2}$$

अब, $z = \sqrt{2} \tan \theta$ रखिये ।

इससे, $dz = \sqrt{2} \sec^2\theta \, d\theta$ होगा ।

इसलिये,

$$y = \sqrt{2} \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{2 + 2\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{\theta}{\sqrt{2}} + c$$

अब,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right) \text{ है ।}$$

अत: वाँछित हल

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+c \text{ है ।}$$

उदाहरण 4 : निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिये :

$$x^2(y-1)\,dx+y^2(x-1)dy=0$$

[ध्यान दीजिए कि दी हुई अवकल समीकरण, समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2\,(y-1)}{y^2(x-1)}$$

के समतुल्य है, जो अनुच्छेद 4.5 में दी हुई समीकरण (2) के प्रकार की है ।]

हल : चरों को पृथक करने पर, हम

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy=-\frac{x^2}{x-1}dx$$

प्राप्त करते हैं । इसको समाकलित करने पर, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\int\frac{y^2}{y-1}\,dy=-\int\frac{x^2}{x-1}\,dx$$

या, $$\int\frac{y^2-1+1}{y-1}\,dy=-\int\frac{x^2-1+1}{x-1}dx$$

या, $$\int\frac{y^2-1}{y-1}\,dy+\int\frac{dy}{y-1}=-\int\frac{x^2-1}{x-1}\,dx-\int\frac{dx}{x-1}$$

या, $$\int(y+1)dy+\ln|y-1|=-\int(x+1)dx-\ln|x-1|$$

या, $$\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{x^2}{2}-x-\ln|x-1|+c$$

या, $$x^2+y^2+2(x+y)+2\ln|(x-1)(y-1)|=2c=k \text{ (माना)}$$

जो वाँछित हल है ।

उदाहरण 5 : निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिये :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^2\sin x$$

जबकि प्रतिबंध यह है कि जब $x=0$, तब $\frac{dy}{dx}=0$ तथा $y=0$ हैं ।

हल : दी हुई अवकल समीकरण के दोनों पक्षों को समाकलित करने पर, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx}=\int x^2\sin x\,dx$$

$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx \qquad \text{(भागों द्वारा समाकलन से)}$$

$$= -x^2 \cos x + 2[x \sin x - \int \sin x \, dx]$$ (पुन: भागों द्वारा समाकलन से)

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c_1$$

जब $x=0$, तब $\frac{dy}{dx}=0$ है। इसीलिये, $c_1=-2$

अत:, $\frac{dy}{dx} = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x - 2$

पुन: समाकलित करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$y = -\int x^2 \cos x \, dx + 2\int x \sin x \, dx + 2\int \cos x \, dx - 2\int dx$$

अब, $\int x^2 \cos x \, dx$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx$$
$$= x^2 \sin x - 2[-x \cos x + \int \cos x \, dx]$$
$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x$$

तथा $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$

$$= -x \cos x + \sin x$$

अत:, $y = -x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x$

$$+ 2\sin x - 2x + c_2$$
$$= -x^2 \sin x - 4x \cos x + 6 \sin x - 2x + c_2$$

जब $x=0$, तब $y=0$ है। इसलिए $c_2=0$

अत:, $y=(6-x^2) \sin x - 4x \cos x - 2x$

जो वाँछित हल है।

ध्यान दीजिए कि यह एक विशिष्ट हल है, क्योंकि इसमें कोई स्वेच्छिक स्थिरांक नहीं है।

उदाहरण 6 : एक कण (particle), जिसका प्रारम्भिक वेग (velocity) u है, स्वतंत्रतापूर्वक गुरुत्वाकर्षण (gravity) के अन्तर्गत एक स्थिर त्वरण (acceleration) g से नीचे गिर रहा है। समय t पर कण का वेग v तथा उसके द्वारा चली गई दूरी s ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि समय t पर, कण का वेग तथा त्वरण क्रमश: $\frac{ds}{dt}$ तथा $\frac{d^2s}{dt^2}$ द्वारा व्यक्त किए जाते हैं। क्योकि गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत स्थिर त्वरण g है, अत: हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \quad (1)$$

(1) को समाकलित करने पर, हम

$$\frac{ds}{dt} = gt + c_1$$

प्राप्त करते हैं। जब $t=0$ तब $\frac{ds}{dt}=u$ है, क्योंकि कण का प्रारम्भिक वेग u दिया हुआ है।

इसलिये, $c_1 = u$

इस प्रकार, $$\frac{ds}{dt} = gt + u \quad (2)$$

जिससे कण का किसी समय t पर वेग v प्राप्त होता है।

(2) को समाकलित करने पर, हमें

$$s = \int gt\, dt + \int u\, dt$$

$$= \frac{gt^2}{2} + ut + c_2$$

प्राप्त होता है। जब $t = 0$ तब $s = 0$ है, इसलिये $c_2 = 0$ है।

अतः, $$s = ut + \frac{1}{2} gt^2$$

जिससे किसी समय t पर कण द्वारा चली दूरी s प्राप्त होती है।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्न में से प्रत्येक अवकल समीकरण का क्रम तथा घात ज्ञात कीजिये :

(i) $t^2 \frac{d^2s}{dt^2} - st \frac{ds}{dt} = s$

(ii) $\sqrt{1-x^2}\, dx + \sqrt{1-y^2}\, dy = 0$

(iii) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s \frac{d^2s}{dt^2} = 0$

(iv) $y = px + \sqrt{a^2p^2 + b^2}$, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$

(v) $x \frac{dy}{dx} + \frac{3}{\frac{dy}{dx}} = y^2$

2. जाँच कीजिये कि $y + x + 1 = 0$, अवकल समीकरण
$$(y - x)\, dy - (y^2 - x^2)\, dx = 0$$
का एक हल है।

3. जाँच कीजिए कि c के प्रत्येक मान के लिए, $y = (x^3 - x) \ln (cx)$, अवकल समीकरण $(x^3 - x) y_1 - (3x^2 - 1) y = x^5 - 2x^3 + x$ को संतुष्ट करता है, जहाँ $y_1 = \frac{dy}{dx}$ है।

4. जाँच कीजिये कि $y=cx+\frac{a}{c}$ तथा $y^2=4ax$ दोनों ही अवकल समीकरण

$$y=x\frac{dy}{dx}+a\frac{dx}{dy}$$ को संतुष्ट करते हैं।

5. दिखाइये कि यदि $y=Ae^{Bx}$ हो, तो $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ होगा।

6. दिखाइये कि यदि $y=xe^{2x}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}=y\left(2+\frac{1}{x}\right)$ होगा।

7. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिये :

(i) $\frac{dy}{dx}=x^6+x^2-\frac{2}{x}$ (ii) $\frac{dy}{dx}=\ln x$

(iii) $(1+\cos x)\,dy=(1-\cos x)\,dx$

(iv) $\frac{dy}{dx}+2x=e^{3x}$ (v) $\frac{dy}{dx}-x\sin^2 x=\frac{1}{x\ln x}$

(vi) $(\tan^2 x+2\tan x+5)\frac{dy}{dx}=2(1+\tan x)\sec^2 x$

(vii) $\frac{dy}{dx}=\cos^8 x\sin^4 x+x\sqrt{2x+1}$

(viii) $(x+2)\frac{dy}{dx}=x^2+4x-9$ (ix) $(x^2+1)\frac{dy}{dx}=1$

(x) $dx=(x^2+2x+2)\,dy$ (xi) $\sin^3 x\frac{dx}{dy}=\sin y$

(xii) $(e^x+e^{-x})\frac{dy}{dx}=e^x-e^{-x}$ (xiii) $\sqrt{1-x^6}\,dy=x^2\,dx$

(xiv) $dy+xy\,dx=x\,dx$ (xv) $xy\,(y+1)\,dy=(x^2+1)\,dx$

(xvi) $(1-x^2)\,dy+xy\,dx=xy^2\,dx$

(xvii) $(x^2-y\,x^2)\,dy+(y^2+x^2y^2)\,dx=0$

(xviii) $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$

(xix) $\sec^2 x\tan y\,dx+\sec^2 y\tan x\,dy=0$

(xx) $\frac{dy}{dx}=x^5\tan^{-1}(x^3)$ (xxi) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

(xxii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-1$

(xxiii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin^{-1}x$

(xxiv) $\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2}=e^x$

(xxv) $\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2}=1$

(xxvi) $\frac{d^2y}{dx^2}=\cos 3x+\sin 3x$

(xxvii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin^2 x$

(xxviii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\ln x$

8. अवकल समीकरण $\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)=3x+4y$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिये, जबकि दिया है कि $x=0$ होने पर $y=0$ है।

9. $\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)=a$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिये, जबकि यह दिया है कि $x=0$ होने पर $y=1$ है।

10. $e^{\frac{dy}{dx}}=x+1$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिये, जबकि यह दिया है कि $x=0$ होने पर $y=3$ है।

11. यदि $x=\frac{1}{n}\cos^{-1}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ हो, जहाँ n एक शून्येतर पूर्णांक है, तथा यदि $x=\pi$ होने पर $\frac{dy}{dx}=0$ और $y=0$ हों, तो उपर्युक्त अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिये।

12. किसी वस्तु को बनाने की उपांत लागत (marginal cost) $c'(x)=\frac{dc}{dx}=2+0.15x$ द्वारा दी गई है। यदि $c(0)=100$ दिया है, तो संपूर्ण लागत फलन (total cost function) $c(x)$ ज्ञात कीजिये।

13. ठण्डी होती हुई किसी वस्तु का तापमान (temperature) T, जिस दर से गिर रहा है वह अंतर $T-S$ के समानुपाती है, जहाँ S परिवेश माध्यम (surrounding medium) का स्थिर तापमान है।

इस प्रकार, $\frac{dT}{dt}=-k(T-S)$

है, जहाँ k (>0) एक स्थिरांक है तथा t समय है। यदि यह दिया है कि $T(0)=150$ है, तो उपर्युक्त अवकल समीकरण को हल कीजिये।

14. मनोविज्ञान (psychology) में, उद्दीपन अनुक्रिया (stimulus response) का एक मॉडल (model) यह दिखाता है कि उद्दीपन (stimulus) S के सापेक्ष प्रतिक्रिया (reaction) R

के परिवर्तन की दर, S के व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) है, अर्थात्

$$\frac{dR}{dS}=\frac{a}{S}$$

है, जहाँ $a(>0)$ कोई स्थिरांक है। उपर्युक्त अवकल समीकरण को हल कीजिये।

15. प्रतिरोध (resistance) तथा स्वप्रेरकत्व (self-inductance) वाले विद्युत परिपथ (electric circuit) के लिये विद्युत-वाहक बल (electromotive force) का समीकरण

$$E=Ri+L\frac{di}{dt}$$

है, जहाँ E परिपथ को दिया गया विद्युत-वाहक बल है, R, प्रतिरोध तथा L प्रेरण (induction) का गुणांक है। समय t पर धारा (current) i ज्ञात कीजिये, जब
(i) $E=0$ है तथा (ii) E एक शून्येतर (non-zero) स्थिरांक है।

त्रिविमीय ज्यामिति

एकक V

निर्देशांक

5.1 भूमिका

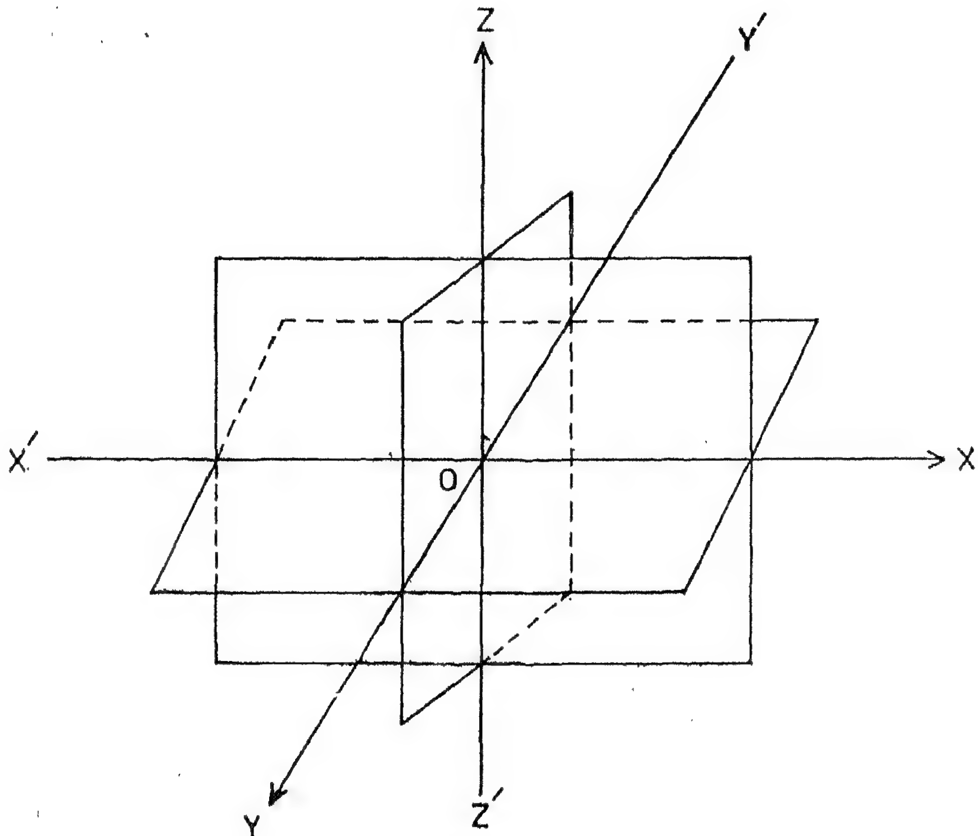
हम जानते हैं कि एक तल (plane) में किसी बिन्दु की स्थिति दो संख्याओं द्वारा निर्धारित की जा सकती है। ये संख्याएं दो परस्पर लम्ब रेखाओं, जो निर्देशांक अक्ष (coordinate axes) कहलाते हैं, से इस बिंदु की दूरियाँ निरूपित करती हैं। व्यवहारिक जीवन में हम यह आशा नहीं कर सकते हैं कि बिन्दु हमेशा एक तल में ही स्थित होगा। जब हम किसी इमारत को देखते हैं तो हम उसकी लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई के बारे में सोचते हैं। जब हम किसी उड़ते हुए पक्षी या पतंग को देखते हैं तब हम आकाश (space) में उसकी गति को देखते हैं। इस त्रिविमीय आकाश (three dimensional space), जिसमें हम रहते हैं, के कारण त्रिविमीय ज्यामिति का अध्ययन करना आवश्यक हो जाता है।

आइये, एक हवाई जहाज की हवाई अड्डे से उड़ने के पहले व बाद की स्थितियों के बारे में विचार करें। जब तक यह भूमि पर स्थित है, हम इसकी स्थिति को दो लम्ब रेखाओं के संदर्भ में, जो कि भूमि पर खींची गई हों, उन दो संख्याओं की सहायता से निश्चित कर सकते हैं जो इन रेखाओं से उसकी दूरियाँ निरूपित करती हैं। परन्तु ज्यों ही हवाई जहाज उड़ना आरम्भ करने के बाद भूमि से ऊपर चलेगा, हम उसकी स्थिति को केवल दो ही संख्याओं द्वारा निश्चित नहीं कर सकते। आकाश में हवाई जहाज की स्थिति ज्ञात करने के लिए, हमें आकाश में एक अन्य निश्चित रेखा खींचनी पड़ती है और इस प्रकार हमें तीन संख्याओं की आवश्यकता होगी जो इन तीनों निश्चित रेखाओं से हवाई जहाज की दूरियाँ निरूपित करती हैं। इस प्रकार, हम देखते हैं कि आकाश में किसी बिन्दु की स्थिति को निरूपित करने के लिए तीन संख्याओं की आवश्यकता है।

5.2 त्रिविमीय आकाश में निर्देशांक अक्ष तथा निर्देशांक तल

अब हम निर्देशांक अक्षों तथा निर्देशांक तलों को पुरः स्थापित (introduce) करके तल में बिन्दुओं की संकल्पना का आकाश के बिन्दुओं के लिए व्यापकीकरण करते हैं। हम तीन तल इस प्रकार लेते हैं कि वे एक बिन्दु O पर मिलें तथा एक दूसरे पर लम्ब हों (देखिये आकृति 5.1)। इन तीनों तलों की प्रतिच्छेदी रेखायें X′OX, Y′OY तथा Z′OZ क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष कहलाती हैं। ये **समकोणिक निर्देशांक अक्ष (rectangular coordinate axes)** कहलाती हैं, क्योंकि ये तीनों अक्ष परस्पर लम्ब हैं। तल XOY, YOZ तथा ZOX क्रमशः XY-तल, YZ-तल तथा ZX-तल कहलाते हैं। XOY तल को कागज के तल के रूप में माना जा सकता है तथा रेखा OZ को XOY तल पर एक लम्ब के रूप में लिया जा सकता है। इन्हें **(समकोणिक) निर्देशांक** तल कहते हैं। XY-तल

के ऊपर की ओर मापी गई दूरियों को धनात्मक तथा नीचे की ओर की दूरियों को ऋणात्मक लेते हैं। YZ-तल के दाईं ओर मापी गई दूरियों को धनात्मक तथा बाईं ओर की दूरियों को ऋणात्मक लेते हैं। ZX-तल के सामने की ओर मापी गई दूरियों को धनात्मक तथा पीछे की ओर की दूरियों को ऋणात्मक लेते हैं। तीनों निर्देशांक अक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु O निर्देशांकों का **मूलबिन्दु (origin)** कहलाता है। तीनों निर्देशांक तल आकाश को आठ भागों में बाँटते हैं जिन्हें **अष्टांशक (octants)** कहते हैं।



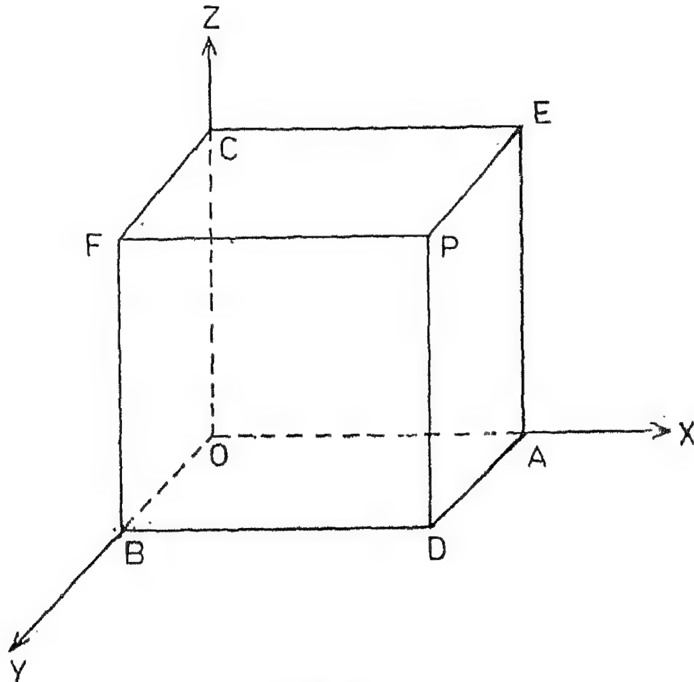
आकृति 5.1

5.3 आकाश में किसी बिन्दु के निर्देशांक

निर्देशांक तलों तथा निर्देशांक अक्षों को चुनने के बाद आकाश में किसी दिए हुए बिन्दु के निर्देशांकों को निम्न प्रकार स्पष्ट किया जाता है :

P से होकर निर्देशांक तलों के समान्तर तीन तल खींचिये जो x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष को क्रमश: A, B तथा C पर काटें। लम्बाई का एक उपयुक्त मात्रक लेते हुए, मान लीजिए $OA=x$, $OB=y$ तथा $OC=z$ है (देखिये आकृति 5.2)। तब ये तीनों संख्यायें x, y तथा z आकाश में बिन्दु

P के निर्देशांक कहलाते हैं तथा हम P (x, y, z) लिखते हैं। x, y तथा z क्रमशः बिन्दु P के x, y तथा z निर्देशांक कहलाते हैं। जैसा कि पहले स्पष्ट किया गया था, इनमें से प्रत्येक निर्देशांक धनात्मक या ऋणात्मक तब ही होगा जबकि तदनुरूपी निर्देशांक अक्ष पर स्थित दिष्ट रेखाखण्ड (directed line segment) धनात्मक या ऋणात्मक होगा।



आकृति 5.2

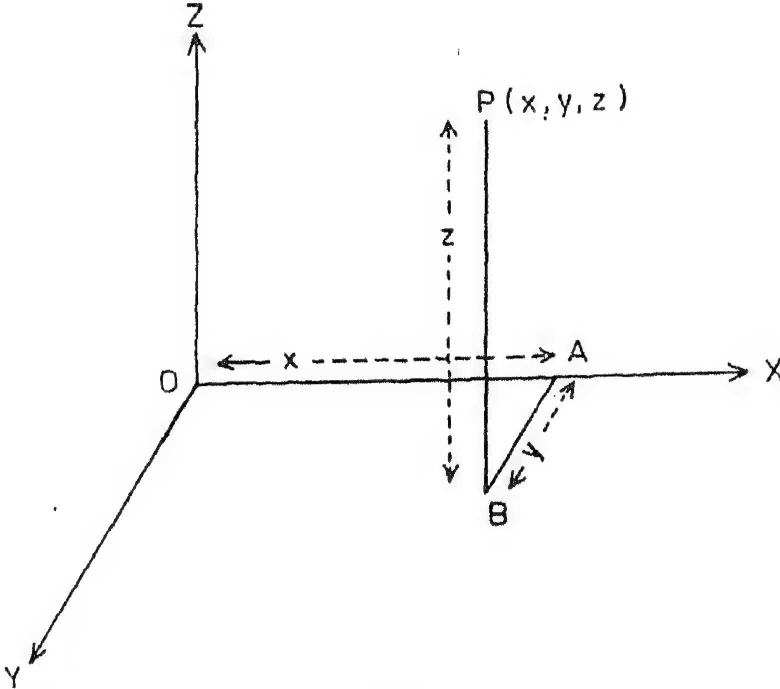
विलोमतः यदि तीन संख्याएँ x, y, z दी हुई हों तो वह बिन्दु ज्ञात करने के लिए जिसके ये निर्देशांक हैं, हम O से निर्देशांक अक्षों OX, OY तथा OZ पर क्रमशः x, y तथा z मात्रकों की दूरियां काटते हैं। यदि दी हुई संख्या धनात्मक है तो हम ये दूरी अक्ष की धनात्मक दिशा में काटते हैं तथा यदि यह ऋणात्मक है तो हम ये दूरी अक्ष की ऋणात्मक दिशा में काटते हैं। इन अन्तः बिन्दुओं को हम क्रमशः A, B तथा C से व्यक्त करते हैं। इन बिन्दुओं से होकर हम क्रमशः YZ, ZX तथा XY-तलों के समान्तर तल खींचते हैं। इन तीनों तलों का प्रतिच्छेद बिन्दु ही वाँछित बिन्दु P होगा जिसके निर्देशांक x, y, z हैं।

बिन्दु P (x, y, z) की स्थिति ज्ञात करने की एक वैकल्पिक विधि निम्न प्रकार है :

(1) x-अक्ष पर उचित दिशा में मूलबिन्दु O से एक लम्बाई $OA = x$ मात्रक काटिये (देखिये आकृति 5.3)।

(2) A से होकर XY-तल में x-अक्ष पर लम्ब (अतः y-अक्ष के समान्तर) एक रेखा AB खींचिये।

(3) उचित दिशा में AB$=y$ मात्रक की लम्बाई काटिये ।
(4) B से होकर XY-तल पर लम्ब (अत: z-अक्ष के समान्तर) एक रेखा BP खींचिये ।
(5) उचित दिशा में BP$=z$ मात्रक की लम्बाई काटिये ।
इस प्रकार, हम बिन्दु P (x, y, z) की स्थिति ज्ञात करते हैं ।



आकृति 5.3

टिप्पणी : मूलबिन्दु के निर्देशांक (0, 0, 0) हैं । x-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक (a, 0, 0), y-अक्ष पर स्थित बिन्दु के (0, b, 0) तथा z-अक्ष पर स्थित बिन्दु के (0, 0, c) लिए जा सकते हैं ।

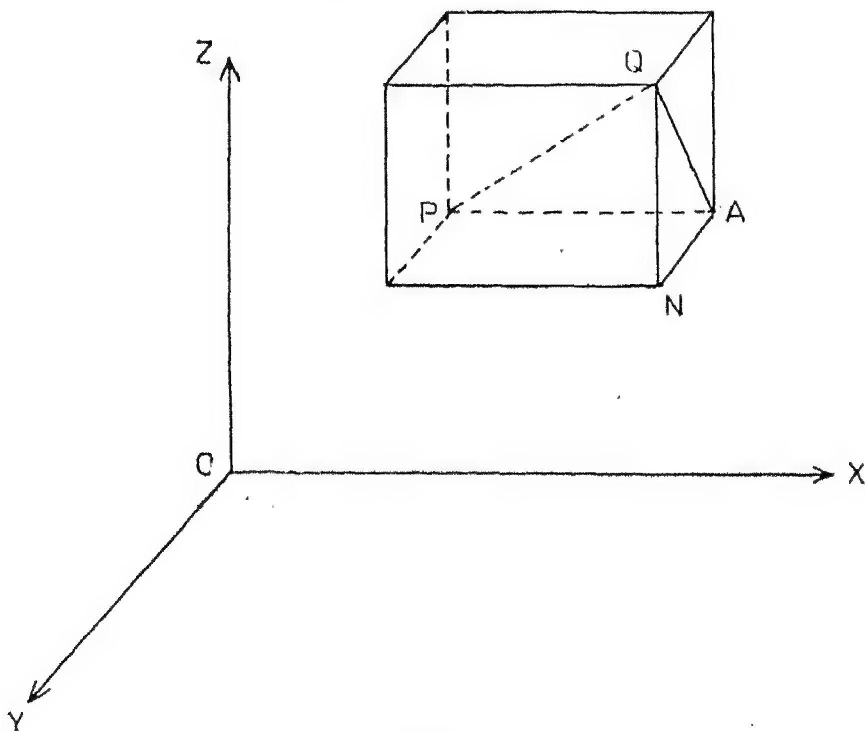
प्रश्नावली 5.1

1. आकृति 5.2 में यदि P के निर्देशांक (a, b, c) हों, तो A, D, B, F, C, E तथा O के निर्देशांक क्या होंगे ?
2. यदि P एक बिन्दु (x, y, z) है, तो निर्देशांक तलों YZ, ZX तथा XY से इसकी लाम्बिक दूरियाँ क्या हैं ?
3. उन सात बिन्दुओं के निर्देशांक क्या होंगे जिनके निर्देशांकों के निरपेक्ष मान (absolute values) बिन्दु (1, 2, 3) के निरपेक्ष मानों के बराबर हैं ?

4. एक घन, जिसकी भुजा 5 है, का एक शीर्ष (vertex) बिन्दु (1, 0, 0) पर है तथा इस शीर्ष से होकर जाने वाले तीनों किनारे (edges) क्रमशः धनात्मक x-अक्ष, ऋणात्मक y तथा z-अक्षों के समान्तर हैं। घन के अन्य शीर्षों तथा केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. बिन्दु (a, b, c) की निर्देशांक अक्षों से लाम्बिक दूरियाँ ज्ञात कीजिए।
6. बिन्दुओं (0, 5, 2) तथा (—2, 3, 5) से होकर निर्देशांक तलों के समान्तर खींचे गये तलों से निर्मित समकोणिक समान्तरपटफलक (rectangular parallelopiped) के किनारों की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए।
7. दिये गये तलों के सापेक्ष निम्नलिखित बिन्दुओं के प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए :
   (क) (5, 0, —1), ZOX-तल के सापेक्ष
   (ख) (—3, 7, —7), XOY-तल के सापेक्ष
   (ग) (0, 1, —2), YOZ-तल के सापेक्ष

5.4 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

माना समकोणिक अक्षों OX, OY तथा OZ के समुच्चय के सन्दर्भ में P (x_1, y_1, z_1) तथा Q (x_2, y_2, z_2) दो बिन्दु हैं। बिन्दुओं P तथा Q से होकर निर्देशांक तलों के समान्तर तल खींचिये जिससे एक समकोणिक समान्तरपटफलक बन जाए, जिसका एक विकर्ण PQ हो (देखिये आकृति 5.4)।



आकृति 5.4

अब, क्योंकि $\angle PAQ$=एक समकोण,

इसलिए, $PQ^2=PA^2+AQ^2=PA^2+AN^2+NQ^2$ ($\because \angle ANQ$=एक समकोण $\therefore AQ^2=AN^2+NQ^2$)

अब, $PA=x_2-x_1$, $AN=y_2-y_1$ तथा $NQ=z_2-z_1$ है।

अतः, $$\mathbf{PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

इसलिए, $$\mathbf{PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

इससे हमें दो बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी प्राप्त होती है। विशेष रूप से, यदि $x_1=y_1=z_1=0$, अर्थात् यदि इनमें से एक बिन्दु मूलबिन्दु O हो, तो $OQ=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$, जिससे मूलबिन्दु और किसी बिन्दु (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी प्राप्त होती है।

5.5 दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड का विभाजन

माना बिन्दुओं P तथा Q के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) हैं। हम बिन्दु $R(x, y, z)$ जो रेखाखण्ड PQ को $m : n$ के अनुपात (ratio) में विभाजित करता है, के निर्देशांक ज्ञात करेंगे।

XY-तल पर PL, QM तथा RN लम्ब खींचिये (देखिये आकृति 5.5)। तब ये रेखायें समतलीय अर्थात् एकतलीय (coplanar) होंगी जिससे बिन्दु L, M, N एक रेखा में स्थित होंगे जो कि उस तल, जिसमें रेखायें PL, RN तथा QM स्थित हैं, का XY-तल के साथ प्रतिच्छेदन (intersection) है। अब R से होकर रेखा LNM के समान्तर एक रेखा SRT खींचिए। यह रेखा उस तल में स्थित होगी जिसमें PL, QM तथा RN स्थित हैं। माना यह LP (बढ़ाई गई) को बिन्दु S तथा QM को बिन्दु T पर काटती है।

अब समरूप त्रिभुजों PSR तथा QTR से,

$$\frac{m}{n}=\frac{PR}{QR}=\frac{SP}{QT}=\frac{RN-PL}{QM-RN}=\frac{z-z_1}{z_2-z}$$

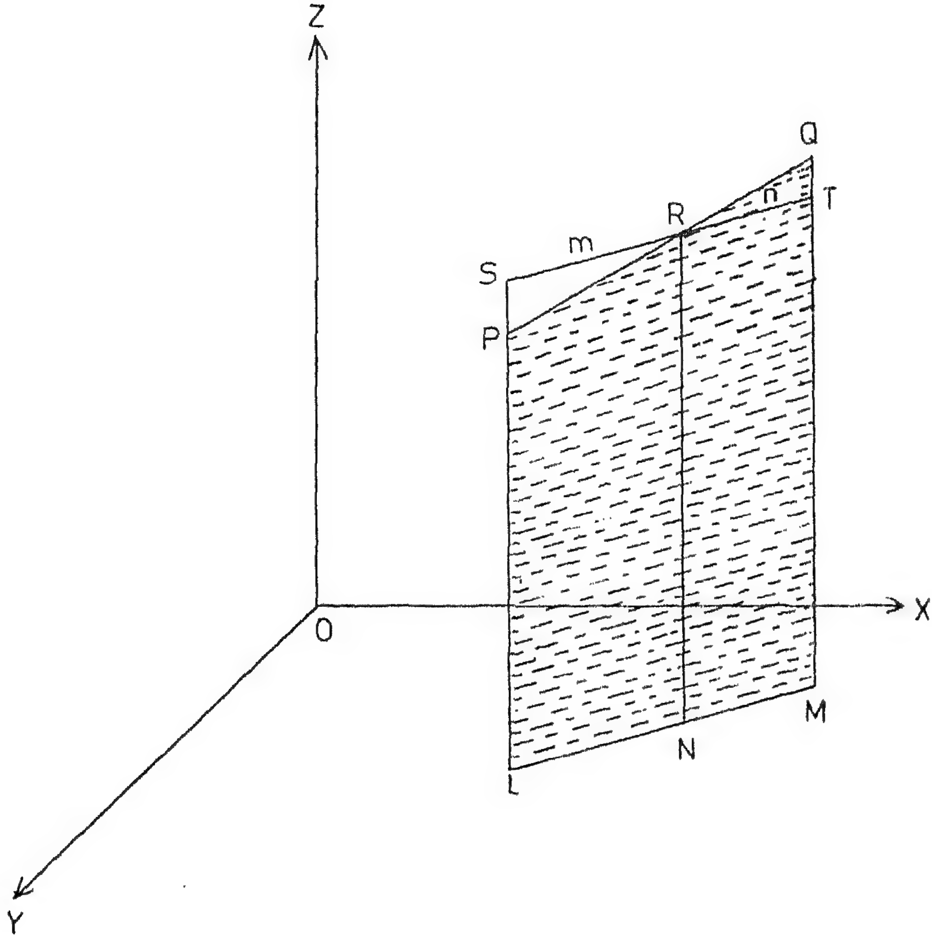
अतः, $$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

इसी प्रकार, $$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

यदि $m : n$ धनात्मक है तो बिन्दु R, PQ को अन्तः विभाजित करता है तथा यदि $m : n$ ऋणात्मक है, तो वह बाह्य विभाजित करता है।

अतः उस बिन्दु के निर्देशांक जो (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को m : n के अनुपात में विभाजित करता है, निम्न हैं :

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \quad (1)$$



आकृति 5.5

$m=n=1$ रखने पर, हमें (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु (x, y, z) के निर्देशांक प्राप्त होते हैं जो $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$, $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ हैं।

$\frac{m}{n}=k$ रखने पर, हम देखते हैं कि (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \frac{ky_2+y_1}{k+1}, \frac{kz_2+z_1}{k+1}\right)$$ हैं।

यह दो दिये हुए बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के व्यापक निर्देशांकों को भी निरूपित करता है।

टिप्पणी : पाठक यह जाँच कर सकते हैं कि यदि बिन्दु R एक बाह्य (external) बिन्दु है तो इसके निर्देशांक वही होंगे जैसे (1) में दिए गये हैं, परन्तु इसमें n के स्थान पर —n रखना पड़ेगा।

5.6 एक रेखा की दिक्कोज्याएँ तथा दिक्-अनुपात

किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ (direction cosines) उन कोणों की कोज्याएँ (cosines) होती हैं जो वह रेखा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बनाती है। इस प्रकार यदि α, β, γ वह कोण है जो एक रेखा x, y तथा z-अक्षों से बनाती है, तो $\cos \alpha$, $\cos \beta$, तथा $\cos \gamma$ उस रेखा की **दिक्कोज्यायें** कहलाती हैं।

यह देखा जा सकता है कि यदि दो रेखाएँ एकतलीय (coplanar) न हों (अतः अप्रतिच्छेदी हों), तो हम इन रेखाओं के बीच के कोण को उस कोण के बराबर परिभाषित करते हैं जो इन दी हुई रेखाओं के समान्तर दो एकतलीय रेखाओं के बीच बनता है।

किसी रेखा की दिक्कोज्याओं को हम प्रायः l, m, n से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार $l=\cos \alpha$, $m=\cos \beta$ तथा $n=\cos \gamma$ है।

कोई तीन संख्यायें जो किसी रेखा की दिक्कोज्याओं के समानुपाती हैं उस रेखा के **दिक्-अनुपात (direction ratios)** कहलाती हैं। इस प्रकार यदि a, b, c किसी रेखा के दिक्-अनुपात हैं, तो $\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}$ होता है। ध्यान दीजिए कि एक रेखा की दिक्कोज्याएं, जहां तक उनके परिमाणों का सम्बंध है, अद्वितीय होती हैं; परन्तु एक रेखा के दिक्-अनुपात अनन्त हो सकते हैं।

टिप्पणी : x-अक्ष की दिक्कोज्याएँ 1, 0, 0 होती हैं। y-अक्ष की दिक्कोज्याएँ 0, 1, 0 तथा z-अक्ष की दिक्कोज्याएँ 0, 0, 1 होती हैं।

5.7 एक रेखा की दिक्कोज्याओं में सम्बन्ध

माना l, m, n किसी रेखा OP की दिक्कोज्याएँ हैं, जहाँ P बिन्दु (x, y, z) है तथा O मूल-बिन्दु है। हम PA $\perp$ x-अक्ष खींचते हैं। इसलिए, $OA=x$ है। माना OP; x, y तथा z-अक्षों से क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाती है।

माना $OP=r$ है (देखिए आकृति 5.6)

अब, त्रिभुज POA से

$$\cos \alpha=\frac{OA}{OP}=\frac{x}{r}$$

इसलिए, $x=lr$

इसी प्रकार, $y=mr$ तथा $z=nr$

अतः, $x^2+y^2+z^2=r^2(l^2+m^2+n^2)$

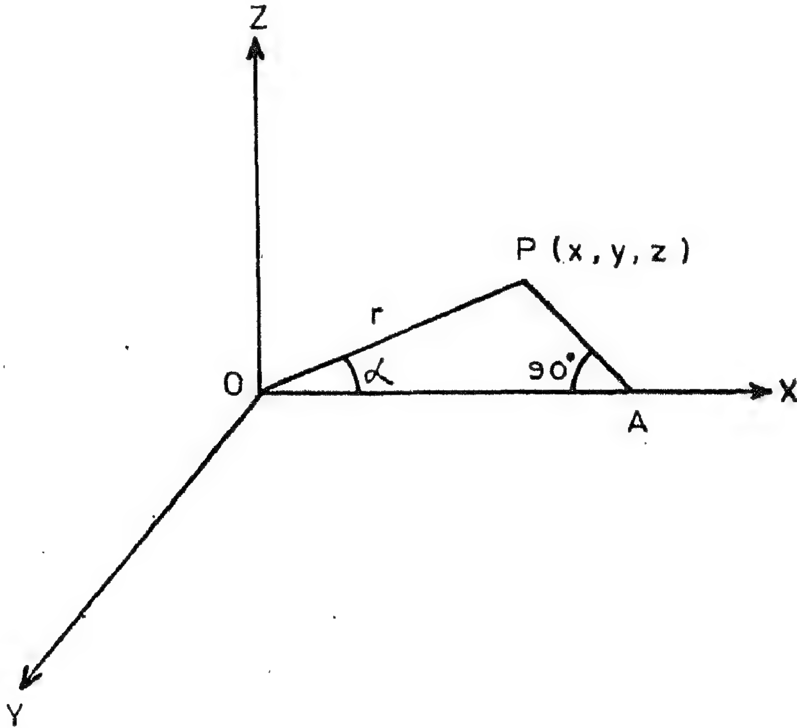
परन्तु, $x^2+y^2+z^2=r^2$

अतः, $l^2+m^2+n^2=1$

अतः यदि l, m, n किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ हों, तो l, m, n सम्बन्ध

$$l^2+m^2+n^2=1$$

को अवश्य ही संतुष्ट करेंगे।



आकृति 5.6

यदि a, b, c इस रेखा के दिक्-अनुपात हैं, तो

$$\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=\pm\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

इसलिए, $$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

जहाँ सभी में एक ही चिन्ह, धनात्मक या ऋणात्मक*, लिया जाता है।

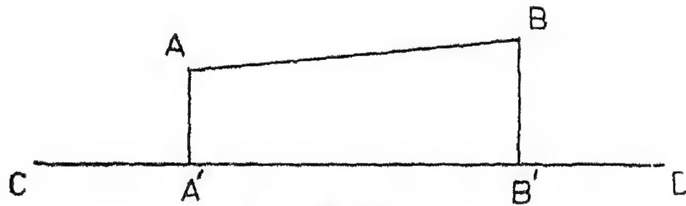
*ध्यान दीजिए कि यदि किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं तो $-l, -m, -n$ भी इस रेखा की दिक्कोज्याएँ होंगी।

अत: यदि किसी रेखा के दिक्-अनुपात दिये हुए हों, तो हम इन सूत्रों की सहायता से उस रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कर सकते हैं ।

टिप्पणी : यदि l, m, n किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ हों जो मूलबिन्दु से होकर नहीं जाती हो, तब भी यही परिणाम सत्य होगा, क्योंकि हम एक ऐसी रेखा ले सकते हैं जो मूलबिन्दु से होकर जाती हो तथा दी हुई रेखा के समान्तर हो । इन दोनों समान्तर रेखाओं की दिक्कोज्याएं बराबर होंगी ।

5.8 रेखाखण्ड का प्रक्षेप

माना AB एक रेखाखण्ड है तथा CD कोई दी हुई रेखा है । A तथा B से CD पर लम्ब डालिए तथा मान लीजिए कि A′, B′ इन लम्बों के पाद (feet) हैं (देखिये आकृति 5.7) । तब हम A′B′ को रेखाखण्ड AB का रेखा CD पर **प्रक्षेप (projection)** परिभाषित करते हैं । यदि AB,



आकृति 5.7

CD से α कोण बनाती है, तो $A'B' = AB \cos \alpha$ होगा । इस प्रकार, एक रेखाखण्ड का किसी रेखा पर प्रक्षेप उस रेखाखण्ड की लम्बाई तथा रेखाखण्ड और उस रेखा के बीच के कोण की कोज्या के गुणनफल से प्राप्त होता है ।

यह दर्शाना सरल है कि **रेखाखण्डों A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,…,$A_{n-1}A_n$, जहां A_1, A_2,…,A_n आकाश में कोई बिन्दु हैं, के किसी दी हुई रेखा पर प्रक्षेपों का बीजीय योग उसी रेखा पर A_1A_n के प्रक्षेप के बराबर होता है ।**

5.9 दो बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा के दिक्-अनुपात

माना $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं । हमें रेखा PQ के दिक्-अनुपात ज्ञात करने हैं ।

माना l, m, n रेखा PQ की दिक्कोज्याएँ हैं । तब PQ का x-अक्ष पर प्रक्षेप $l \cdot PQ = x_2 - x_1$ है ।

इसी प्रकार, $m \cdot PQ = y_2 - y_1$

तथा, $n \cdot PQ = z_2 - z_1$

इसलिए, $$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = PQ$$

अतः, **रेखा PQ के दिक्-अनुपात $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ तथा $z_2 - z_1$ हैं ।**

5.10 दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड का एक दी हुई रेखा पर प्रक्षेप

माना $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं तथा l, m, n दी हुई रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं। हम PQ का दी हुई रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात करेंगे।

आकृति 5.4 से हम देखते हैं कि

$$PA = x_2 - x_1,\ AN = y_2 - y_1 \text{ तथा } NQ = z_2 - z_1 \text{ है।}$$

PA, AN तथा NQ क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष के समान्तर हैं। अतः इनके उस रेखा पर प्रक्षेप जिसकी दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं क्रमशः $(x_2-x_1)\,l$, $(y_2-y_1)m$ तथा $(z_2-z_1)\,n$ होंगे।

क्योंकि किसी रेखा पर PQ का प्रक्षेप, उसी रेखा पर PA, AN तथा NQ के प्रक्षेपों के योग के बराबर होता है, अतः **PQ का दी हुई रेखा पर वाँछित प्रक्षेप निम्न है :**

$$(\mathbf{x_2-x_1})\mathbf{l}+(\mathbf{y_2-y_1})\mathbf{m}+(\mathbf{z_2-z_1})\mathbf{n}$$

5.11 दो रेखाओं के बीच का कोण

माना AB तथा CD दो रेखाएँ हैं जिनकी दिक्कोज्याएँ क्रमशः l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 हैं। मूलबिन्दु O से होकर AB तथा CD के समान्तर क्रमशः OP तथा OQ खींचिये (देखिए आकृति 5.8)।

माना AB तथा CD के बीच का कोण θ है। तब OP तथा OQ की दिक्कोज्याएँ क्रमशः l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 हैं तथा $\angle POQ=\theta$ है। माना $OQ=r$ है। तब Q के निर्देशांक (l_2r, m_2r, n_2r) हैं। अतः OQ का OP पर प्रक्षेप निम्न है :

$$l_1(l_2r-0)+m_1(m_2r-0)+n_1(n_2r-0)=r\cos\theta$$

अतः, $\mathbf{\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}$*

$\sin\theta$ का मान ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\ (l_2^2+m_2^2+n_2^2)-(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)^2$$
$$=(l_1m_2-l_2m_1)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2$$

इसलिए, $\mathbf{\sin\theta=\pm\sqrt{(l_1m_2-l_2m_1)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2}}$

यदि a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 रेखाओं के दिक्-अनुपात हों, तो स्पष्टतया उनके बीच का कोण θ निम्न प्रकार से दिया जा सकता है :

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}}{\sqrt{\mathbf{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\ \sqrt{\mathbf{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}\ *$$

हम देखते हैं कि यदि $\theta=\frac{\pi}{2}$ हो, अर्थात् यदि दोनों रेखाएँ परस्पर लम्ब हों तो $\cos\theta=0$ होगा। इस प्रकार,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

अर्थात्, $\mathbf{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}=0$

यदि $\theta=0$, अर्थात् यदि दोनों रेखाएँ समान्तर हों तो $\sin\theta=0$ होगा।

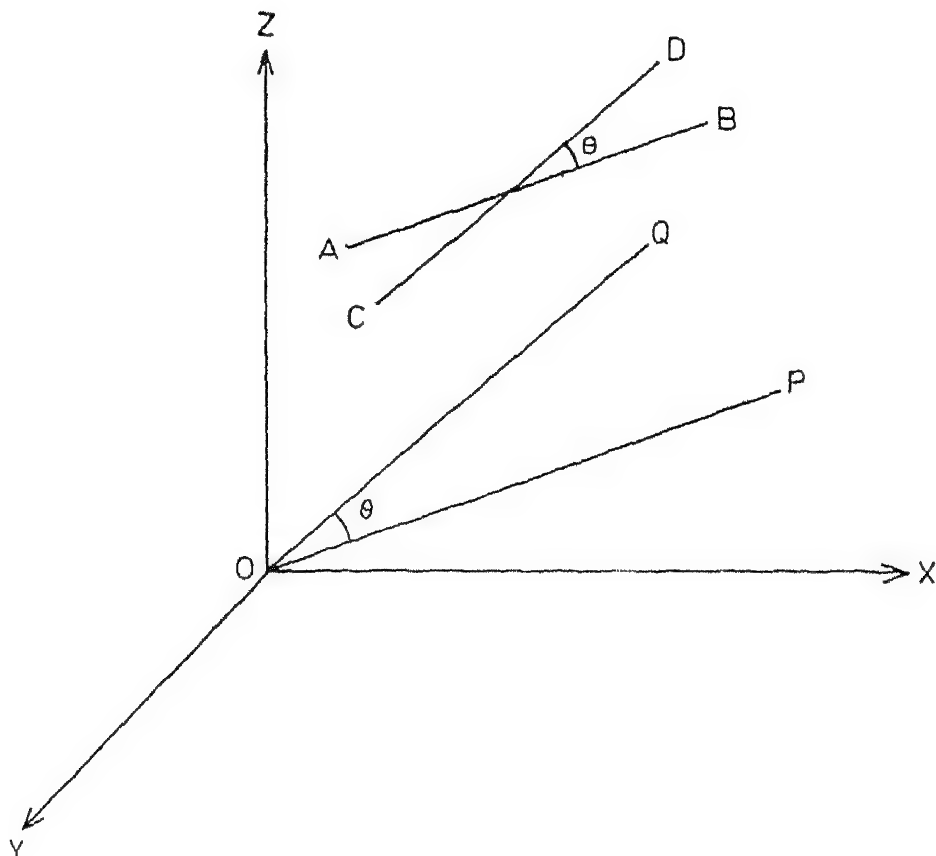
इस प्रकार, $l_1m_2-l_2m_1=0,\ m_1n_2-m_2n_1=0,\ n_1l_2-n_2l_1=0$

---

*जब तक कि दोनों रेखाएँ परस्पर लम्ब न हों, दक्षिण पक्ष के धनात्मक या ऋणात्मक होने पर $\cos\theta$ का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। $\cos\theta$ के धनात्मक मान से दोनों रेखाओं के बीच का न्यून कोण प्राप्त होता है तथा ऋणात्मक मान से अधिक कोण।

अर्थात्, $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

इस स्थिति में, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ भी सत्य होगा।



आकृति 5.8

5.12 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : एक रेखाखण्ड के क्रमशः x, y तथा z-अक्षों पर प्रक्षेप 12, 4 तथा 3 हैं। रेखाखण्ड की लम्बाई तथा उससे निर्धारित रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना रेखाखण्ड की लम्बाई r है तथा इससे निर्धारित रेखा की दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं। चूंकि इस रेखाखण्ड के अक्षों पर प्रक्षेप क्रमशः 12, 4, 3 हैं, अतः हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$12=lr,\ 4=mr \text{ तथा } 3=nr$$

वर्ग करके जोड़ने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$r^2(l^2+m^2+n^2)=12^2+4^2+3^2=169$$

या, $r^2=169$ (क्योंकि $l^2+m^2+n^2=1$)

इसलिए, $r=13$

इसलिए, $l=\frac{12}{13},\ m=\frac{4}{13},\ n=\frac{3}{13}$

उदाहरण 2 : वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (—9, 4, 5) तथा (11, 0,—1) को मिलाने वाली रेखा तथा मूलबिन्दु से इस रेखा पर डाले गये लम्ब के मिलने से प्राप्त होता है।

हल : दिये हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{11k-9}{k+1},\ \frac{0.k+4}{k+1},\ \frac{-k+5}{k+1}\right)$$

हैं, जहाँ k एक स्थिरांक है। इस बिन्दु तथा मूलबिन्दु को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात

$$\frac{11k-9}{k+1},\ \frac{4}{k+1},\ \frac{5-k}{k+1} \text{ हैं।}$$

यदि यह रेखा, दिये हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, जिसके दिक्-अनुपात —9 —11, 4—0, 5+1, अर्थात् —20, 4, 6 हैं, पर लम्ब हो, तो

$$\frac{-20(11k-9)}{k+1}+\frac{4\times 4}{k+1}+\frac{6(5-k)}{k+1}=0$$

या, $-220k+180+16+30-6k=0$

या, $k=1$

इसलिए, वांछित बिन्दु $\left(\frac{11-9}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5-1}{2}\right)$, अर्थात् (1, 2, 2) है।

प्रश्नावली 5.2

1. बिन्दुओं (2, 3, 5) तथा (4, 3, 1) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
2. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (5, 4, 2) तथा (—1, —2, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को

   (*i*) 2 : 3 (*ii*) —2 : 3

   के अनुपात में विभाजित करता है।
3. निम्न बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए :

   (*i*) (0, 0, 2), (3, 0, 1) (*ii*) (2, 1, 2), (4, 2, 0)
4. बिन्दुओं (—1, 0, 3) तथा (2, 5, 1) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का उस रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए जिसके दिक्-अनुपात 6, 2, 3 हैं।
5. उन रेखाओं के बीच का न्यून कोण ज्ञात कीजिए जिनके दिक्-अनुपात क्रमशः 2, 3, 6 तथा 1, 2, 2 हैं।

6. दिखाइये कि बिन्दु (0, 7, 10), (−1, 6, 6) तथा (−4, 9, [illegible]) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाते हैं ।
7. दिखाइये कि बिन्दु (4, 7, 8), (2, 3, 4), (−1, −2, 1) तथा (1, 2, 5) एक समान्तर चतुर्भुज बनाते हैं ।
8. दिखाइये कि बिन्दु (5, −1, 1), (7, −4, 7), (1, −6, 10) तथा (−1, −3, 4) एक समचतुर्भुज के शीर्ष हैं ।
9. दिखाइये कि बिन्दु (0, 4, 1), (2, 3, −1), (4, 5, 0) तथा (2, 6, 2) एक वर्ग के शीर्ष हैं ।
10. दिखाइये कि तीनों बिन्दु (−2, 3, 5), (1, 2, 3) तथा (7,0, −1) संरेखी (collinear) हैं ।
11. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिये जो चारों बिन्दुओं $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ तथा (0, 0, 0) से समान दूरी पर है ।
12. A(3, 2, 0), B(5, 3, 2), C(−9, 6, −3) तीन बिन्दु हैं जो एक त्रिभुज बनाते हैं । कोण BAC का समद्विभाजक AD, BC से बिन्दु D पर मिलता है । D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।
[**संकेत** : $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$]
13. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं (2, 4, 5) तथा (3, 5, −4) को मिलाने वाला रेखा-खण्ड YZ-तल द्वारा विभाजित होता है ।
14. यदि एक रेखा, किसी घन के चारों विकर्णों से $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ कोण बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{4}{3}$$ है ।

15. यदि l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 दो परस्पर लम्ब रेखाओं की दिक्कोज्यायें हों, तो दिखाइये कि इन दोनों रेखाओं पर लम्ब रेखा की दिक्कोज्यायें $m_1n_2-m_2n_1,\ n_1l_2-n_2l_1,\ l_1m_2-l_2m_1$ हैं ।
16. दिखाइये कि उस त्रिभुज, जिसके शीर्ष $(x_r, y_r, z_r), (r=1, 2, 3)$ हैं, का केन्द्रक (centroid)

$$\left(\frac{1}{3}\sum_{r=1}^{3} x_r,\ \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{3} y_r,\ \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{3} z_r\right)$$ होता है ।

17. जाँच कीजिए कि तीन परस्पर लम्ब रेखाओं, जिनकी दिक्कोज्याएँ क्रमशः l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 तथा l_3, m_3, n_3 हैं, से समान रूप से झुकी हुई एक रेखा की दिक्कोज्याएँ

$$\frac{l_1+l_2+l_3}{\sqrt{3}},\ \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{3}},\ \frac{n_1+n_2+n_3}{\sqrt{3}}$$ ली जा सकती हैं ।

एकक VI

तल

6.1 तल का व्यापक समीकरण

तल इस प्रकार की सतह (पृष्ठ) [surface] होती है कि सतह में स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसमें पूर्ण रूप से स्थित होती है। खण्ड सूत्र (section formula) की सहायता से हम यह सिद्ध करेंगे कि x, y, z में प्रथम घात की प्रत्येक व्यापक समीकरण जो

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

के प्रकार की है, एक तल निरूपित करती है।

हम (1) द्वारा निरूपित बिन्दुपथ (locus) पर दो बिन्दु (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) लेते हैं। तब

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \tag{2}$$

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \tag{3}$$

(2) को m तथा (3) को n से गुणा करके जोड़ने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$A(mx_1+nx_2)+B(my_1+ny_2)+C(mz_1+nz_2)+D(m+n)=0$$

अर्थात्, $$A\frac{mx_1+nx_2}{m+n}+B\frac{my_1+ny_2}{m+n}+C\frac{mz_1+nz_2}{m+n}+D=0$$

जो यह दर्शाता है कि बिन्दु

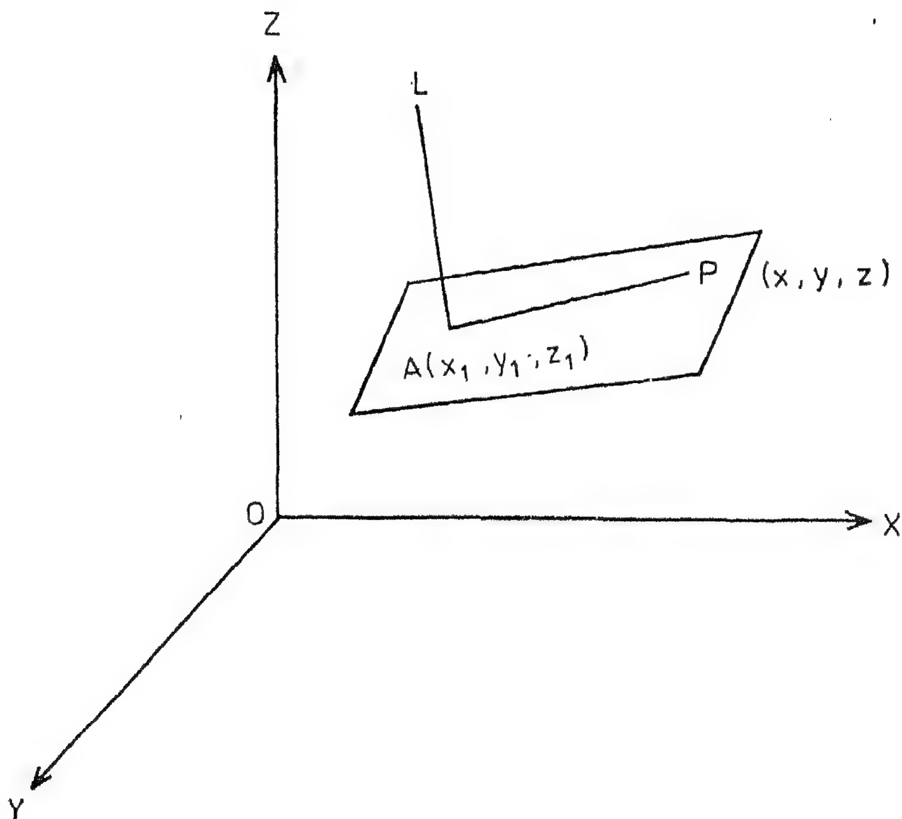
$$\left(\frac{mx_1+nx_2}{m+n}, \frac{my_1+ny_2}{m+n}, \frac{mz_1+nz_2}{m+n}\right)$$

भी बिन्दुपथ (1) पर स्थित है। परन्तु यह बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित कोई भी बिन्दु है। अतः बिन्दुपथ पर स्थित किन्हीं भी दो स्वेच्छिक बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु भी उस बिन्दुपथ पर स्थित है। अतः (1) द्वारा निरूपित बिन्दुपथ एक तल है। अतः x, y, z में प्रथम घात की प्रत्येक समीकरण एक तल निरूपित करती है।

6.2 दिये हुए बिन्दु से होकर जाते हुए तल का समीकरण जब अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ दी हुई हैं

माना तल में $A(x_1, y_1, z_1)$ एक दिया हुआ बिन्दु है तथा रेखा AL तल पर अभिलम्ब (normal) है। माना इस रेखा की दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं। स्पष्टतः, बिन्दु A से होकर जाता हुआ

केवल एक ही तल ऐसा होगा जो दी हुई रेखा AL पर लम्ब है। इस तल में कोई बिन्दु $P(x, y, z)$ लीजिए। स्पष्टतः, AP, AL पर लम्ब है। क्योंकि AP के दिक्-अनुपात $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$ हैं,



आकृति 6.1

अतः $l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$

यह x, y, z में एक रैखिक समीकरण है, अतः यह एक तल निरूपित करती है। क्योंकि यह बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाता है, अतः यह तल की वाँछित समीकरण है।

उपप्रमेय : यदि a, b c बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाने वाले एक तल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात हैं, तो उस तल का समीकरण

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

होता है।

यह ऊपर सिद्ध किये गए परिणाम से सीधे प्राप्त किया जा सकता है, क्योंकि दिक्-अनुपात a, b, c दिक्कोज्याओं l, m, n के समानुपाती होते हैं।

6.3 तल के समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप

माना मूलबिन्दु से किसी तल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p है तथा माना इस अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं। मान लीजिए कि $p>0$ है। अत: इस लम्ब के पाद के निर्देशांक (lp, mp, np) हैं।

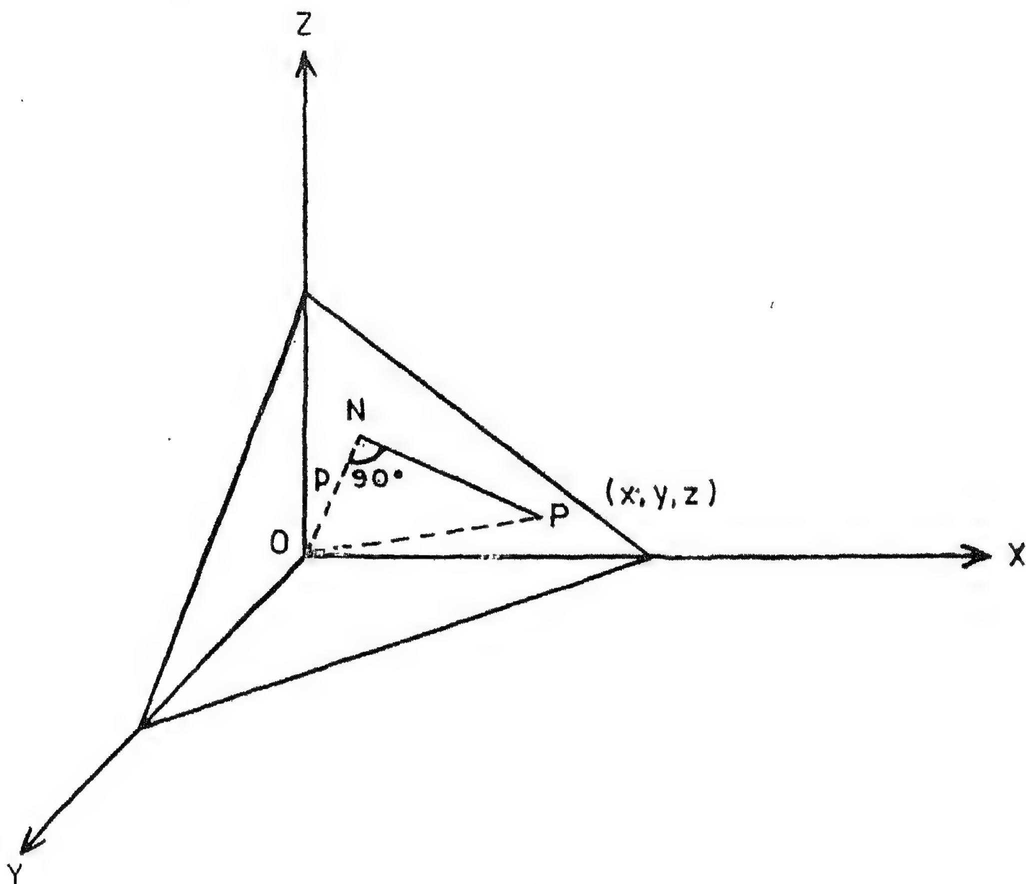
इस प्रकार, अनुच्छेद 6.2 से, बिन्दु (lp, mp, np) से होकर जाने वाले तल का समीकरण निम्न है :

$$l(x-lp)+m(y-mp)+n(z-np)=0$$

या, $$lx+my+nz-p(l^2+m^2+n^2)=0$$

या, $$lx+my+nz=p \qquad (\text{क्योंकि } l^2+m^2+n^2=1)$$

इसे तल के समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप **(normal form of the equation of a plane)** कहते हैं। इस समीकरण को सीधे निम्न प्रकार भी प्राप्त कर सकते हैं :



आकृति 6.2

मूलबिन्दु O से दिये हुए तल पर एक लम्ब ON डालिए जहाँ N इस लम्ब का पाद है। माना $ON=p$ है। तल में कोई बिन्दु $P(x, y, z)$ लीजिए (देखिए आकृति 6.2)।

OP का ON पर प्रक्षेप स्पष्टत: ON है। अब, बिन्दुओं $(0, 0, 0)$ तथा (x, y, z) को मिलाने वाले रेखाखण्ड OP का ON, जिसकी दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं, पर प्रक्षेप

$$l(x-0)+m(y-0)+n(z-0)=lx+my+nz \text{ है।}$$

अत: $\mathbf{lx+my+nz=p}$, **तल की अभिलम्ब स्वरूप में अभीष्ट समीकरण है।**

6.4 तल के व्यापक समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप में परिवर्तन

माना तल का समीकरण

$$ax+by+cz-d=0$$

अर्थात्,
$$ax+by+cz=d \tag{1}$$

है, जहाँ d धनात्मक है। यदि d ऋणात्मक हो तो समीकरण के दोनों पक्षों को -1 से गुणा करिये जिससे दक्षिण पक्ष (right hand side) धनात्मक हो जाये। माना इसी तल की अभिलम्ब स्वरूप में समीकरण

$$lx+my+nz=p \tag{2}$$

है, जहाँ l, m, n मूलबिन्दु से इस तल पर डाले गये अभिलम्ब की दिक्कोज्याएं हैं तथा p इस अभिलम्ब की लम्बाई है। परिपाटी अनुसार, हम $p>0$ लेते हैं। क्योंकि (1) तथा (2) एक ही तल को निरूपित करती हैं, अत: इन्हें सर्वसम (identical) होना चाहिए।

$$\text{अत: } \frac{d}{p}=\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

परन्तु हम मान चुके हैं कि d तथा p दोनों ही धनात्मक हैं, अत: हम $a^2+b^2+c^2$ का केवल धनात्मक वर्गमूल ही लेंगे।

$$\text{इसलिये, } l=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\text{तथा}\qquad p=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

अत:, तल की अभिलम्ब स्वरूप में अभीष्ट समीकरण निम्न है :

$$\frac{\mathbf{ax}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}}+\frac{\mathbf{by}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}}+\frac{\mathbf{cz}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}}=\frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}}$$

उपप्रमेय 1 : उपर्युक्त परिणाम से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि तल के व्यापक समीकरण में a, b, c जो क्रमश: x, y, z के गुणांक हैं, तल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात निरूपित करते हैं।

उपप्रमेय 2 : XY-तल का समीकरण $0.x+0.y+z=0$, अर्थात $z=0$ है, क्योंकि XY-तल के अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ 0, 0, 1 हैं। इसी प्रकार, YZ तथा ZX-तलों के समीकरण क्रमश: $x=0$ तथा $y=0$ हैं।

6.5 तल के समीकरण का अंतः खण्ड स्वरूप

अब हम एक तल का समीकरण उस तल द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अंतःखण्डों (intercepts) के पदों में ज्ञात करेंगे। माना तल का समीकरण

$$Ax+By+Cz+D=0, \ (D\neq 0)$$

है। माना इसके द्वारा x, y, z-अक्षों पर काटे गए अंतःखण्ड क्रमशः a, b, c हैं। अतः यह तल x, y तथा z-अक्षों से क्रमशः बिन्दुओं $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ तथा $(0, 0, c)$ पर मिलता है। इसलिए

$$Aa+D=0 \text{ या, } A=-\frac{D}{a}$$

$$Bb+D=0 \text{ या, } B=-\frac{D}{b}$$

$$Cc+D=0 \text{ या, } C=-\frac{D}{c}$$

इन मानों को तल के समीकरण में रखने तथा उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को काटने पर, हमें

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{c}}=\mathbf{1}$$

प्राप्त होता है, **जो तल की अंतःखण्ड स्वरूप में वांछित समीकरण है।**

6.6 तीन असंरेखी बिन्दुओं से होकर जाने वाले तल का समीकरण

माना तीन दिए हुए असंरेखी (non-collinear) बिन्दु (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) हैं।

अब, (x_1, y_1, z_1) से होकर जाने वाले तल का समीकरण

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \qquad (1)$$

है।

क्योंकि यह तल (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) से होकर भी जाता है, अंतः हमें

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0 \qquad (2)$$

तथा, $$a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1)+c(z_3-z_1)=0 \qquad (3)$$

प्राप्त होते हैं।

इन तीनों समीकरणों में a, b, c को विलुप्त करने पर, हमें

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

प्राप्त होता है, जो दिए हुए तीनों बिन्दुओं से होकर जाने वाले तल का वाँछित समीकरण है।

वस्तुतः प्रश्न हल करते समय, पाठक को चाहिए कि वह पहली दो समीकरणों से a, b, c के समानुपाती मान ज्ञात करके तथा फिर उन्हें तीसरे समीकरण में रखकर तीनों समीकरणों में से स्थिरांकों a, b, c को विलुप्त करे।

6.7 दो तलों के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले तल

माना दो तलों के समीकरण

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad (1)$$

तथा
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \quad (2)$$

हैं। तब समीकरण

$$(\mathbf{a_1x+b_1y+c_1z+d_1})+\mathbf{k}(\mathbf{a_2x+b_2y+c_2z+d_2})=0 \quad (3)$$

जहां k एक स्वेच्छिक स्थिरांक (arbitrary constant) है, उन सभी बिंदुओं से संतुष्ट होती है जो तलों (1) और (2) में उभयनिष्ठ हैं। साथ ही, क्योंकि यह समीकरण x, y, z में रैखिक है, इसलिए यह एक तल निरूपित करती है।

साथ ही, k के विभिन्न मानों के लिए, (3) तलों के एक निकाय (system) को व्यक्त करेगी। अतः समीकरण (3), तलों (1) तथा (2) की प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले तलों के निकाय को व्यक्त करती है।

6.8 दो तलों के बीच का कोण

दो तलों के बीच का कोण, किसी बिन्दु से दोनों तलों पर खींचे गए अभिलम्बों के बीच के कोण के बराबर होता है।

क्योंकि तलों

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

तथा
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

के अभिलम्बों के दिक्-अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 के बराबर हैं, इसलिए

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}}{\sqrt{\mathbf{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\ \sqrt{\mathbf{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

जहाँ θ दोनों तलों के बीच का कोण है।

दोनों तल समान्तर होंगे, यदि दोनों अभिलम्ब समान्तर हों। परन्तु दोनों अभिलम्ब समान्तर होंगे, यदि

$$\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{a_2}}=\frac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_2}}=\frac{\mathbf{c_1}}{\mathbf{c_2}} \text{ हो।}$$

अतः यह वह प्रतिबन्ध है जब दोनों तल समान्तर होंगे।

दोनों तल परस्पर लम्ब होंगे यदि $\theta=90°$ हो, अर्थात् $\cos\theta=0$ हो। अतः,

$$\mathbf{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0} \text{ हो।}$$

यह वह प्रतिबन्ध है जब दोनों तल परस्पर लम्ब होंगे।

टिप्पणी : दो तल सर्वसम होंगे यदि उनके समीकरणों में x, y, z के गुणांक तथा स्थिरांक पद समानुपाती हों। अर्थात् जब,

$$\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{a_2}}=\frac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_2}}=\frac{\mathbf{c_1}}{\mathbf{c_2}}=\frac{\mathbf{d_1}}{\mathbf{d_2}} \text{ हो।}$$

6.9 तल से एक बिन्दु की दूरी

माना तल का समीकरण

$$lx+my+nz=p \tag{1}$$

है, जहाँ p (>0) मूलबिन्दु से तल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है तथा l, m, n इस अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ हैं। माना P (x_1, y_1, z_1) कोई बिन्दु है जो इस तल पर स्थित नहीं है तथा यह बिंदु और मूलबिंदु परस्पर तल के विपरीत ओर स्थित हैं।

समीकरण

$$lx+my+nz=p' \tag{2}$$

एक तल निरूपित करता है जो (1) के समान्तर है, जहां p' मूलबिन्दु से इस तल पर डाले गये अभिलम्ब की लम्बाई है।

यदि यह तल P(x_1, y_1, z_1) से होकर जाता है, तो

$$lx_1+my_1+nz_1=p'$$

माना PL, P से तल (1) पर डाला गया लम्ब है तथा माना ON तथा ON′ मूलबिन्दु से क्रमशः तलों (1) तथा (2) पर डाले गये लम्ब हैं, जहाँ O मूलबिन्दु है।

तब,
$$PL=NN'=ON'-ON=p'-p$$
$$=lx_1+my_1+nz_1-p$$

अतः, बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से तल $lx+my+nz=p$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई, व्यंजक $lx+my+nz-p$ में बिन्दु के निर्देशांक रखने से प्राप्त होती है।

उस स्थिति में जबकि बिंदु P (x_1, y_1, z_1) और मूलबिंदु दिए हुए तल के एक ही ओर स्थित हों, स्पष्ट रूप से यह लाम्बिक दूरी $p-lx_1-my_1-nz_1$ होगी।

यदि तल का समीकरण $Ax+By+Cz+D=0$ है तथा $D<0$ है, तो हम पहले इस समीकरण को अभिलम्ब स्वरूप

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0,$$

में बदलते हैं। तब उपर्युक्त परिणामों का प्रयोग करने से, तल

$$Ax+By+Cz+D=0$$

पर (x_1, y_1, z_1) से डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$\pm\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

जब मूलबिंदु और दिया हुआ बिंदु तल के विपरीत ओर स्थित होते हैं, तब + चिह्न लिया जाता है तथा जब ये बिंदु तल के एक ही ओर स्थित* होते हैं तब — चिह्न लिया जाता है।

---

*यह दिखाया जा सकता है कि दो बिंदु (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) तल $Ax+By+Cz+D=0$ के एक ही ओर अथवा विपरीत ओर स्थित होते हैं जबकि व्यंजक $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ और $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ क्रमशः समान चिह्न अथवा विपरीत चिह्न के हों। इस प्रकार, उपरोक्त नियम से हम यह निर्धारित कर सकते हैं कि मूलबिंदु तथा दिया हुआ बिंदु दिए हुए तल के एक ही ओर स्थित हैं या विपरीत ओर स्थित हैं।

अतः किसी बाहरी बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से किसी तल $ax+by+cz+d=0$, जहाँ d धनात्मक या ऋणात्मक या शून्य हो सकता है, पर डाले गए लम्ब की लम्बाई व्यंजक

$$\left| \frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$

से दी जाती है।

6.10 दो दिए हुए तलों के बीच बने कोणों को समद्विभाजित करने वाले तलों के समीकरण

माना दिए हुए दोनों तलों के समीकरण

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

तथा $$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

हैं। हम इन दोनों तलों के बीच बने कोणों को समद्विभाजित करने वाले तलों में से किसी एक तल में कोई बिन्दु (x, y, z) लेते हैं। तब इस बिन्दु से दोनों तलों पर डाले गए लम्बों की लम्बाइयाँ परिमाण में बराबर होनी चाहिए।

अतः, $$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

ये x, y, z में रैखिक समीकरण होने के कारण समद्विभाजित करने वाले तलों के वांछित समीकरण निरूपित करती हैं।

इनमें से एक समद्विभाजित करने वाला तल, दोनों दिये हुए तलों के बीच के न्यून कोण को तथा दूसरा अधिक कोण को समद्विभाजित करता है। इसे एक उदाहरण की सहायता से समझाया जायेगा (अनुच्छेद 6.11 का उदाहरण 4 देखिए)।

6.11 हल उदाहरण

उदाहरण 1: उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के समान्तर है तथा y और z-अक्षों पर क्रमशः 5 और 7 के अंतःखण्ड काटता है।

हल : माना तल का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

है। यहाँ $b=5$ और $c=7$ है।

क्योंकि तल, x-अक्ष के समान्तर है जिसकी दिक्कोज्याएँ 1, 0, 0 होती हैं, अतः तल का अभिलम्ब x-अक्ष पर लम्ब होना चाहिए।

परन्तु इस तल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ हैं।}$$

इसलिए, $$\frac{1}{a} \times 1+0\times \frac{1}{b}+0\times \frac{1}{c}=0$$

इसलिए, $$\frac{1}{a}=0$$

अतः, तल की वाँछित समीकरण निम्न हो जाती है :

$$\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=1$$

या, $$7y+5z=35$$

उदाहरण 2 : उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, -1, 2)$ से होकर जाता है तथा प्रत्येक तल

$$3x+2y-3z=1 \text{ तथा } 5x-4y+z=5$$

पर लम्ब है।

हल : माना $(1, -1, 2)$ से होकर जाने वाले तल का समीकरण

$$a(x-1)+b(y+1)+c(z-2)=0$$

अर्थात्, $$ax+by+cz-a+b-2c=0$$

है। क्योंकि यह तल दोनों दिए हुए तलों पर लम्ब है, इसलिए हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3a+2b-3c=0$$
$$5a-4b+c=0$$

इससे निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{a}{2-12}=\frac{b}{-15-3}=\frac{c}{-12-10}$$

या, $$\frac{a}{10}=\frac{b}{18}=\frac{c}{22}$$

या, $$\frac{a}{5}=\frac{b}{9}=\frac{c}{11}=k \text{ (माना)}$$

इसलिए, $$a=5k,\ b=9k,\ c=11k$$

इन मानों को तल के समीकरण में रखने पर, हमें

$$(5x+9y+11z-5+9-22)k=0$$

अर्थात्, $$5x+9y+11z-18=0$$

प्राप्त होता है, जो तल का वाँछित समीकरण है।

उदाहरण 3 : दिखाइये कि तीन बिन्दुओं $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(-7, -3, -5)$ से होकर जाने वाला तल XZ-तल पर लम्ब है।

हल : $(1, 1, 1)$ से होकर जाने वाले किसी तल का समीकरण

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$$

है। यदि यह $(1, -1, 1)$ तथा $(-7, -3, -5)$ से होकर भी जाता है, तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$a(1-1)+b(-1-1)+c(1-1)=0 \text{ अर्थात् } b=0$$

तथा, $$a(-7-1)+b(-3-1)+c(-5-1)=0, \text{ अर्थात् } 4a+2b+3c=0$$

या, $$c=-\frac{4a}{3}$$

तल के समीकरण में b तथा c के इन मानों को रखने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$a(x-1)-\frac{4a}{3}(z-1)=0$$

या, $$3x-3-4z+4=0$$

या, $$3x-4z+1=0$$

अतः यह समीकरण ही तीनों दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाने वाले तल का समीकरण है ।

अब, XZ-तल का समीकरण $y=0$ है ।

क्योंकि इन तलों के अभिलम्बों के दिक्-अनुपात क्रमशः 3, 0, —4 तथा 0, 1, 0 हैं । इसलिए $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ है ।

अतः, तल $3x-4z+1=0$ तल $y=0$ पर लम्ब है ।

उदाहरण 4 : तलों $2x-y+2z+3=0$ तथा $3x-2y+6z+8=0$ के बीच बने कोणों को समद्विभाजित करने वाले तलों के समीकरण ज्ञात कीजिए । यह भी बताइये कि कौन-सा तल न्यून कोण को समद्विभाजित करता है तथा कौन-सा तल अधिक कोण को समद्विभाजित करता है ।

हल : समद्विभाजित करने वाले दोनों तलों के समीकरण निम्न हैं :

$$\frac{2x-y+2z+3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\pm\frac{3x-2y+6z+8}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}$$

या, $$\frac{2x-y+2z+3}{3}=\pm\frac{3x-2y+6z+8}{7}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर, हमें

$$5x-y-4z-3=0 \qquad (1)$$

प्राप्त होता है ।

ऋणात्मक चिह्न लेने पर, हमें

$$23x-13y+32z+45=0 \qquad (2)$$

प्राप्त होता है ।

अब हम किसी एक समद्विभाजित करने वाले तल, माना (1) तथा दिए हुए किसी एक तल, माना $2x-y+2z+3=0$ के बीच का कोण ज्ञात करते हैं । यदि इन दोनों तलों के बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta=\frac{5\times2+1\times1-4\times2}{\sqrt{5^2+(-1)^2+(-4)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{3\sqrt{42}}=\frac{1}{\sqrt{42}}\ *$$

परन्तु, $$\frac{1}{\sqrt{42}}<\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ$$

इसलिए, $$\theta>45^\circ$$

---

* यदि $\cos\theta$ का मान ऋणात्मक आता है तो हमें उसका केवल निरपेक्ष मान ही लेना चाहिए, क्योंकि हमारी रुचि विभाजित करने वाले तल और दिए हुए तल के बीच न्यून कोण ज्ञात करने में ही है ।

अतः समद्विभाजित करने वाले तल (1) तथा दिए हुए तलों में से एक तल के बीच का कोण $45°$ से अधिक है। अतः समीकरण (1) दोनों दिए हुए तलों के बीच बने अधिक कोण को समद्विभाजित करने वाले तल की समीकरण है, और इसलिए समीकरण (2) दोनों दिए हुए तलों के बीच बने न्यून कोण को समद्विभाजित करने वाले तल की समीकरण है।

उदाहरण 5 : दिखाइये कि समान्तर तलों

$$2x-2y+z+3=0 \text{ तथा } 4x-4y+2z+5=0$$

के बीच की दूरी $\frac{1}{6}$ है।

हल : हम पहले तल में कोई बिन्दु (x_1, y_1, z_1) लेते हैं। जिससे

$$2x_1-2y_1+z_1=-3 \qquad (1)$$

अब (x_1, y_1, z_1) से दूसरे तल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$=-\frac{4x_1-4y_1+2z_1+5}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}$$

$$=-\frac{2(2x_1-2y_1+z_1)+5}{6}$$

$$=-\frac{2\times(-3)+5}{6} \qquad [(1) \text{ से}]$$

$$=\frac{1}{6}$$

प्रश्नावली 6.1

1. बिन्दु (2, 3, 1) से होकर जाने वाले तल का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि तल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 3, 5, 7 हैं।
2. तल $3x-4y+z+5=0$ के समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप ज्ञात कीजिए।
3. उस तल की अंतःखण्ड स्वरूप में समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी समीकरण
   $x+3y-7z+2=0$ है।
4. बिन्दु (2, 1, 3) से होकर जाने वाले उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो तलों
   $x+2y+z=3$ तथा $2x-y-z=5$
   के प्रतिच्छेदन से होकर भी जाता है।
5. दिखाइए कि तल $ax+by+r=0$, $by+cz+p=0$ तथा $cz+ax+q=0$ क्रमशः XY, YZ तथा ZX-तलों पर लम्ब हैं।
6. उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष पर -7 का अंतःखण्ड काटता है तथा ZX-तल के समान्तर है।
7. दिखाइए कि तल $x+2y-3z+4=0$, तलों
   $2x+5y+4z+1=0$ तथा $4x+7y+6z+2=0$
   में से प्रत्येक पर लम्ब है।

8. बिन्दुओं $(2, 1, 0)$, $(3, -2, -2)$ तथा $(3, 1, 7)$ से होकर जाने वाले तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. क्या आप बिन्दुओं $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ तथा $(7, 0, -1)$ से होकर जाते हुए तल की एक अद्वितीय समीकरण प्राप्त कर सकते हैं ? यदि नहीं, तो क्यों ?

10. यदि बिन्दु $P(a, b, c)$ से YZ तथा ZX-तलों पर क्रमशः लम्ब PL तथा PM खींचे जायें, तो तल OLM का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ O मूलबिन्दु है।

11. दिखाइये कि चारों बिन्दु $(-6, 3, 2)$, $(3, -2, 4)$, $(5, 7, 3)$ तथा $(-13, 17, -1)$ एक तलीय (coplanar) हैं।

12. दिखाइये कि बिन्दुओं $(6, -4, 4)$ तथा $(0, 0, -4)$ को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं $(-1, -2, -3)$ तथा $(1, 2, -5)$ को मिलाने वाली रेखा को काटती है।

13. बिन्दुओं $(-1, 1, 1)$ तथा $(1, -1, 1)$ से होकर जाने वाले तथा तल $x+2y+2z=5$ पर लम्ब तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

14. एक तल निर्देशांक अक्षों से A, B, C पर इस तरह मिलता है कि त्रिभुज ABC का केन्द्रक (centroid) बिन्दु $(1, -2, 3)$ है। दिखाइए कि इस तल का समीकरण $6x-3y+2z=18$ है।

15. तलों $2x-y=0$ और $3z-y=0$ की प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले तथा तल $4x+5y-3z=8$ पर लम्ब तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो तल $5x+3y+6z+8=0$ पर लम्ब है तथा जिसमें तलों $x+2y+3z-4=0$ और $2x+y-z+5=0$ की प्रतिच्छेदी रेखा स्थित है।

17. मूलबिन्दु से किसी तल पर डाले गये लम्ब का पाद $(12, -4, -3)$ है। उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. यदि बिन्दुओं $(4, -1, 2)$ तथा $(-3, 2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा एक तल पर लम्ब है तथा उससे बिन्दु $(-10, 5, 4)$ पर मिलती है, तो उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. बिन्दुओं $(1, 0, 0)$ तथा $(0, 1, 0)$ से होकर जाने वाले तथा तल $x+y=3$ से $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाने वाले तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

20. तलों $x+2y+2z-3=0$ तथा $3x+4y+12z+1=0$ के बीच बने कोणों को समद्विभाजित करने वाले तलों के समीकरण ज्ञात कीजिए तथा वह तल दर्शाइये जो न्यून कोण को समद्विभाजित करता है।

21. एक चर तल (variable plane), जो मूलबिन्दु से एक स्थिर दूरी $3p$ पर रहता है, निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर काटता है। दिखाइये कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{p^2}$ है।

सरल रेखा

7.1 रेखा के समीकरणों का असममित रूप

आइये दो तलों के समीकरणों

$$a_1x+b_1x+c_1z+d_1=0 \tag{1}$$

तथा
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \tag{2}$$

पर विचार करें। यदि ये दोनों तल समांतर नहीं हैं तो इन्हें एक रेखा में अवश्य काटना चाहिए। अतः हम इन दोनों समीकरणों को मिलाकर एक रेखा के समीकरणों के रूप में ले सकते हैं। यह निष्कर्ष कि (1) तथा (2) मिलकर एक रेखा निरूपित करते हैं, इस तथ्य से निकलता है कि रेखा पर स्थित कोई भी बिन्दु दोनों तलों पर स्थित है और इसलिए इसके निर्देशांक समीकरणों (1) तथा (2) दोनों को सन्तुष्ट करते हैं। विलोमतः कोई बिन्दु जिसके निर्देशांक समीकरणों (1) तथा (2) को सन्तुष्ट करते हैं, दोनों तलों पर स्थित है तथा इसलिए रेखा पर स्थित है। समीकरण (1) तथा (2) मिलकर एक रेखा की असममित (unsymmetrical) समीकरण कहलाती हैं।

टिप्पणी : किसी रेखा से होकर जाने वाले दो भिन्न तलों को निरूपित करने वाले समीकरणों के युग्म की सहायता से उस रेखा का निरूपण वास्तव में अद्वितीय (unique) नहीं होता है। एक रेखा के ऐसे दो तलों के समीकरणों के युग्म की सहायता से अनन्त निरूपण हो सकते हैं जिनकी यह रेखा उभयनिष्ठ प्रतिच्छेदी रेखा है। उदाहरणार्थ, समीकरणों

$$3x-5y+6z=7$$

तथा
$$7x+4y-9z=12$$

द्वारा निरूपित रेखा, समीकरणों

$$10x-y-3z=19$$

तथा
$$4x+9y-15z=5$$

के युग्म द्वारा भी निरूपित की जा सकती है।

7.2 रेखा के समीकरणों का सममित या कैनानिकल रूप

माना एक रेखा, जिसकी दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं, पर एक बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ है। रेखा पर कोई अन्य बिन्दु $P(x, y, z)$ लीजिए तथा मान लीजिए कि $AP=r$ है। रेखाखण्ड AP के निर्देशांक

अक्षों पर प्रक्षेप $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$ हैं, जिससे हमें

$$x-x_1=lr,\ y-y_1=mr \text{ तथा } z-z_1=nr$$

प्राप्त होता है।

इसलिए, $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ (1) (क्योंकि प्रत्येक r के बराबर है)

समीकरण (1) रेखा की सममित (symmetrical) रूप में वाँछित समीकरण हैं।

टिप्पणी 1 : यदि किसी रेखा के दिक्-अनुपात a, b, c हों, तो (x_1, y_1, z_1) से होकर जाने वाली इस रेखा के समीकरणों का सममित रूप $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ होगा, क्योंकि a, b, c; l, m, n के समानुपाती हैं।

टिप्पणी 2 : उपर्युक्त समीकरण (1) से यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$x=x_1+lr,\ y=y_1+mr \text{ तथा } z=z_1+nr$$

है, जो प्राचल (parameter) r के पदों में रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के व्यापक निर्देशांक हैं।

इन समीकरणों को किसी रेखा के प्राचलिक समीकरण (parametric equations) भी कहते हैं।

टिप्पणी 3 : सममित रूप में x, y तथा z-अक्षों के समीकरण क्रमशः

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0},\ \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0} \text{ तथा } \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1} \text{ हैं।*}$$

7.3 दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा के समीकरण

माना (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) दो दिए हुए बिन्दु हैं। क्योंकि इन बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ हैं, अतः इस रेखा की सममित रूप में वाँछित समीकरण

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \text{ हैं।}$$

7.4 रेखा के समीकरणों का असममित रूप से सममित रूप में परिवर्तन

माना किसी रेखा के असममित रूप में समीकरण

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad (1)$$

तथा

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \quad (2)$$

हैं। माना समीकरण (1) तथा (2) मिलकर जिस रेखा को निरूपित करते हैं उसके दिक्-अनुपात a, b, c हैं। क्योंकि यह रेखा दोनों तलों (1) तथा (2) में स्थित है, अतः दोनों तलों के अभिलम्ब इस रेखा पर लम्ब होने चाहिए।

---

*त्रिविमीय ज्यामिति में किसी रेखा के समीकरणों के सममित रूप में हर में शून्य लिखने की परिपाटी केवल यह दर्शाने के लिए है कि वह रेखा तदनुरूपी अक्ष पर लम्ब है तथा यह अर्थहीन राशि का मान निर्धारित करने के लिए नहीं है।

इसलिए, $aa_1+bb_1+cc_1=0$

तथा, $aa_2+bb_2+cc_2=0$

इससे हमें, $$\frac{a}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{b}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{c}{a_1b_2-a_2b_1}=k \text{ (माना)}$$
प्राप्त होता है, जहाँ k कोई स्थिरांक है।

इसलिए, $a=k(b_1c_2-b_2c_1)$, $b=k(c_1a_2-c_2a_1)$, $c=k(a_1b_2-a_2b_1)$

अब, हमें इस रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांकों की आवश्यकता है। सुविधा की दृष्टि से, हम इस रेखा और XY-तल, अर्थात् तल $z=0$* का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करते हैं। (1) तथा (2) में $z=0$ रखने पर, हम

$$a_1x+b_1y+d_1=0$$

तथा, $$a_2x+b_2y+d_2=0$$

प्राप्त करते हैं।

इसलिए, $$\frac{x}{b_1d_2-b_2d_1}=\frac{y}{d_1a_2-d_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

इसलिए, $$x=\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ y=\frac{d_1a_2-d_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

अतः रेखा पर स्थित एक बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ \frac{d_1a_2-d_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ 0\right)$$

हैं। अतः, सभी में k काटने पर, इस रेखा के सममित रूप में वाँछित समीकरण

$$\frac{x-\dfrac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y-\dfrac{d_1a_2-d_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z-0}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ हैं।}$$

7.5 रेखा तथा तल के बीच का कोण

एक रेखा तथा एक तल के बीच का कोण, उस तल के अभिलम्ब तथा दी हुई रेखा के बीच बने कोण के पूरक कोण (complementary angle) से परिभाषित किया जाता है। माना एक रेखा के समीकरण $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ हैं तथा एक तल का समीकरण $ax+by+cz+d=0$ है, जहाँ l, m, n रेखा के दिक्-अनुपात हैं तथा a, b, c तल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात हैं।

यदि रेखा तथा तल के बीच का कोण θ है, तो दी हुई रेखा तथा दिए हुए तल के अभिलम्ब के बीच का कोण $90°-\theta$ है।

---

*हम तल $z=0$ के स्थान पर रेखा का तल $x=0$ या $y=0$ के साथ भी प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कर सकते हैं। उस स्थिति में जबकि रेखा किसी निर्देशांक तल के समान्तर है, हम उस रेखा का अन्य दो निर्देशांक तलों में से किसी एक तल के साथ प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करेंगे।

इसलिए, $$\cos(90°-\theta)=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

या, $$\sin\theta=\frac{\mathbf{al+bm+cn}}{\sqrt{\mathbf{l^2+m^2+n^2}}\sqrt{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}}$$

इस प्रकार, दी हुई रेखा तथा तल के बीच का कोण ज्ञात हो जाता है।

7.6 रेखा के किसी तल में स्थित होने के लिए प्रतिबन्ध

माना रेखा तथा तल के समीकरण क्रमशः

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

तथा $$ax+by+cz+d=0$$

हैं, जहाँ l, m, n रेखा के दिक्-अनुपात हैं तथा a, b, c तल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात हैं।

रेखा तल में स्थित होगी यदि

(i) तल का अभिलम्ब रेखा पर लम्ब हो, तथा

(ii) रेखा पर स्थित कोई भी बिन्दु तल में स्थित हो।

(*i*) तथा (*ii*) से, हमें निम्न प्रतिबन्ध प्राप्त होते हैं :

$$al+bm+cn=0$$

तथा, $$ax_1+by_1+cz_1+d=0$$

उपर्युक्त ही किसी रेखा के किसी तल में स्थित होने के लिए वाँछित प्रतिबन्ध हैं।

उपप्रमेय : उस तल, जिसमें रेखा

$$\frac{\mathbf{x-x_1}}{\mathbf{l}}=\frac{\mathbf{y-y_1}}{\mathbf{m}}=\frac{\mathbf{z-z_1}}{\mathbf{n}}$$

स्थित है, का व्यापक समीकरण

$$A(\mathbf{x-x_1})+\mathbf{B}(\mathbf{y-y_1})+\mathbf{C}(\mathbf{z-z_1})=\mathbf{0}$$

है, जहाँ A, B, C इस प्रकार हैं कि

$$\mathbf{Al+Bm+Cn=0}$$

7.7 दो रेखाओं के बीच की लघुतम दूरी

हम दो दी हुई विषमतलीय* रेखाओं (skew lines) के बीच की लघुतम दूरी (shortest distance) [S. D.] को उस रेखाखण्ड से परिभाषित करते हैं जो दोनों दी हुई रेखाओं से समकोण पर मिलता है। लघुतम दूरी (S. D.) की लम्बाई, लघुतम दूरी की रेखा के समीकरण तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक जहा लघुतम दूरी की यह रेखा दी हुई रेखाओं को काटती है, ज्ञात करना एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट किया जायेगा (देखिये उदाहरण 5, अनुच्छेद 7.9)।

---

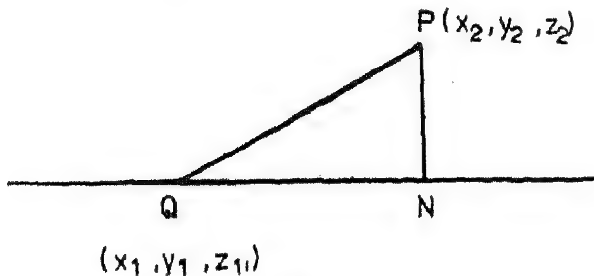
* दो रेखाएँ विषमतलीय तब कहलाती हैं जब वे दोनों एक ही तल में स्थित नहीं होतीं। दो विषमतलीय रेखाएँ सदैव असमान्तर तथा अप्रतिच्छेदी होती हैं।

7.8 बिन्दु की किसी रेखा से दूरी

माना एक रेखा के समीकरण

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

हैं, जहाँ l, m, n इस रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं। माना $P(x_2, y_2, z_2)$ एक बिन्दु है जो रेखा पर स्थित नहीं है। हम रेखा पर स्थित बिन्दु (x_1, y_1, z_1) को Q से दर्शाते हैं। P से दी हुई रेखा पर एक लम्ब PN खींचा गया है (देखिये आकृति 7.1)।



आकृति 7.1

अब, PQ का इस रेखा, जिसकी दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं, पर प्रक्षेप QN है।

इसलिए, $QN=l(x_2-x_1)+m(y_2-y_1)+n(z_2-z_1)$

साथ ही, $PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

इसलिए, $PN=\sqrt{PQ^2-QN^2}$

$$=\Big[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-\{l(x_2-x_1)+m(y_2-y_1)+n(z_2-z_1)\}^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

यह ही किसी बिन्दु की एक दी हुई रेखा से वाँछित दूरी है।

7.9 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-7}{9}$$

के समान्तर है तथा बिन्दु (3, 0, 5) से होकर जाती है।

हल : क्योंकि रेखा दी हुई रेखा के समान्तर है, अतः इसके दिक्-अनुपात 3, 1, 9 होंगे। अतः रेखा के वाँछित समीकरण $\frac{x-3}{3}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-5}{9}$ हैं।

उदाहरण 2 : उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{-2}, \text{ तल } 3x+4y+5z=5$$

को काटती है।

हल : माना $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{-2}=k$ है।

इसलिए, $x=k-1, y=3k-3, z=2-2k$

क्योंकि रेखा तल को काटती है इसलिए x, y, z के ये मान, k के किसी मान के लिए, तल के समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।

x, y, z के मानों को तल के समीकरण में रखने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3(k-1)+4(3k-3)+5(2-2k)=5$$

इसलिए, $k=2$

अतः, वांछित प्रतिच्छेद बिन्दु $(1, 3, -2)$ है।

उदाहरण 3 : बिन्दु $(1, 1, 1)$ से होकर जाने वाले तथा रेखा

$$x-2y+z=2, \; 4x+3y-z+1=0$$

पर लम्ब तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना $(1, 1, 1)$ से होकर जाने वाले तल का समीकरण

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0 \qquad (1)$$

है। क्योंकि यह तल दो दिए हुए तलों की प्रतिच्छेदी रेखा पर लम्ब है, अतः यह उन दोनों तलों पर लम्ब होना चाहिए। अतः हमें

$$A-2B+C=0$$

तथा, $$4A+3B-C=0$$

प्राप्त होता है, जिससे हमें

$$\frac{A}{2-3}=\frac{B}{4+1}=\frac{C}{3+8}$$

अर्थात्, $$\frac{A}{-1}=\frac{B}{5}=\frac{C}{11}$$

प्राप्त होता है।

A, B, C के ये समानुपाती मान (1) में रखने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$1-x+5(y-1)+11(z-1)=0$$

या, $$x-5y-11z+15=0$$

यह ही तल की वांछित समीकरण है।

उदाहरण 4 : उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{1-z}{1}$$

तथा बिन्दु (—1, 0, 2) स्थित हैं ।

हल : दिए हुए समीकरणों को

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}$$

के रूप में लिखा जा सकता है । किसी तल का समीकरण जिसमें दी हुई रेखा स्थित है

$$Ax+B(y-1)+C(z-1)=0 \qquad (1)$$

है, जहाँ

$$-2A+3B-C=0 \qquad (2)$$

क्योंकि (1) बिन्दु (—1, 0, 2) से होकर जाता है, इसलिए

$$-A-B+C=0 \qquad (3)$$

(2) तथा (3) से, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{A}{3-1}=\frac{B}{1+2}=\frac{C}{2+3}$$

या,

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{5}=k \text{ (माना)}$$

इसलिए,

$$A=2k,\ B=3k,\ C=5k$$

A, B तथा C के मान (1) में रखने पर, हम

$$2x+3(y-1)+5(z-1)=0$$

अर्थात्,

$$2x+3y+5z-8=0$$

प्राप्त करते हैं, जो तल का वाँछित समीकरण है ।

उदाहरण 5 : रेखाओं

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+9}{-16}=\frac{z-10}{7}$$

तथा,

$$\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{5-z}{5}$$

के बीच लघुतम दूरी वाली रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए । लघुतम दूरी तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए जहाँ लघुतम दूरी वाली रेखा दी हुई रेखाओं को काटती है ।

हल : माना

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+9}{-16}=\frac{z-10}{7}=r_1$$

तथा,

$$\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}=r_2$$

इसलिए, $(3r_1+8, -16r_1-9, 7r_1+10)$ तथा $(3r_2+15, 8r_2+29, 5-5r_2)$ क्रमशः दी हुई दोनों रेखाओं पर स्थित बिन्दुओं के व्यापक निर्देशांक हैं । हम इन दोनों बिन्दुओं को क्रमशः P_1 तथा

P_2 से व्यक्त करते हैं। P_1P_2 के दिक्-अनुपात

$$3r_1-3r_2-7, -16r_1-8r_2-38,\ 7r_1+5r_2+5$$

हैं। यदि रेखा P_1P_2 दोनों रेखाओं पर लम्ब हो तो वह लघुतम दूरी वाली रेखा होगी। इस स्थिति में, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3(3r_1-3r_2-7)-16(-16r_1-8r_2-38)+7(7r_1+5r_2+5)=0$$

तथा, $$3(3r_1-3r_2-7)+8(-16r_1-8r_2-38)-5(7r_1+5r_2+5)=0$$

इन दोनों समीकरणों को क्रमशः सरल करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$157r_1+77r_2+311=0$$

तथा, $$11r_1+7r_2+25=0$$

इसलिए, $$\frac{r_1}{77\times25-311\times7}=\frac{r_2}{311\times11-157\times25}=\frac{1}{157\times7-77\times11}$$

अर्थात्, $$\frac{r_1}{-252}=\frac{r_2}{-504}=\frac{1}{252}$$

इसलिए, $r_1=-1$ तथा $r_2=-2$

r_1 तथा r_2 के इन मानों को क्रमशः P_1 तथा P_2 के निर्देशांकों में रखने पर, हम

$$P_1(5, 7, 3) \text{ तथा } P_2(9, 13, 15)$$

प्राप्त करते हैं। ये उन बिन्दुओं के वाँछित निर्देशांक हैं जहाँ लघुतम दूरी वाली रेखा दी हुई रेखाओं को काटती है।

इसलिए, लघुतम दूरी $=P_1P_2=\sqrt{(9-5)^2+(13-7)^2+(15-3)^2}$
$=\sqrt{196}=14$

अन्त में, लघुतम दूरी वाली रेखा, अर्थात् बिन्दुओं P_1 (5, 7, 3) तथा P_2 (9, 13, 15) को मिलाने वाली रेखा के समीकरण निम्न हैं :

$$\frac{x-5}{9-5}=\frac{y-7}{13-7}=\frac{z-3}{15-3}$$

या, $$\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-3}{12}$$

या, $$\frac{x-5}{2}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-3}{6}$$

उदाहरण 6 : बिन्दु (2, 3, 4) की रेखा $\frac{4-x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{1-z}{3}$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा के समीकरण $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{-3}$ हैं।

इसलिए, इस रेखा की दिक्कोज्याएँ

$$\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}}, \quad \frac{6}{\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}}, \quad \frac{-3}{\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}}$$

अर्थात्, $-\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7}$ हैं।

बिन्दु (4, 0, 1) रेखा पर स्थित है। इस बिन्दु की दिए हुए बिन्दु (2, 3, 4) से दूरी $\sqrt{(4-2)^2+(-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{22}$ है। दी हुई रेखा पर इन दोनों बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड का प्रक्षेप

$$=-\frac{2}{7}(4-2)+\frac{6}{7}(-3)-\frac{3}{7}(1-4)=-\frac{13}{7}$$

अतः, वाँछित दूरी

$$=\sqrt{(\sqrt{22})^2-\left(\frac{13}{7}\right)^2}$$

$$=\sqrt{22-\frac{169}{49}}=\sqrt{\frac{909}{49}}=\frac{3}{7}\sqrt{101}$$

प्रश्नावली 7.1

1. मूलबिन्दु से होकर जाने वाली तथा दिक्-अनुपात 2, 3, 4 वाली रेखा के समीकरण क्या हैं ?

2. दोनों समीकरणों

$$x+y+z-1=0$$

तथा $$2x-y-3z+1=0$$

द्वारा मिलकर दी जाने वाली रेखा के सममित रूप में समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. निम्न समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाओं के सममित रूप में समीकरण क्या हैं ?

   (i) $x=a,\ y=b$

   (ii) $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$

   (iii) $x=a,\ by+cz+d=0$

   (iv) $ax+by+c=0,\ dy+ez+f=0$

4. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं (2, −3, 1) तथा (3, 4, −5) को मिलाने वाली रेखा तल $2x+y+z=7$ को काटती है।

5. उस रेखा के समीकरणों को ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (5, −7, −3) से होकर जाती है तथा रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-7}{9}$ के समान्तर है।

6. दिखाइये कि दो रेखाएँ

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$

तथा
$$\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$$

परस्पर काटती हैं । इन रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु को भी ज्ञात कीजिए ।

7. दिखाइये कि रेखाएँ

$$x+2y-5z+9=0=3x-y+2z-5$$

तथा $$2x+3y-z-3=0=4x-5y+z+3$$

एकतलीय हैं ।

8. एक रेखा जिसके दिक्-अनुपात 2, 1, 2 हैं, समीकरणों

$$x=y+a=z,\ x+a=2y=2z$$

द्वारा निरूपित प्रत्येक रेखा से मिलती है । प्रत्येक प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

9. बिन्दु (2, 4, —1) से रेखा $x+5=\frac{y+3}{4}=\frac{z-6}{-9}$ पर डाले गए लम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए । इस लम्ब के पाद के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए ।

10. तल $2x-y+z+3=0$ में बिन्दु (1, 3, 4) के प्रतिबिम्ब के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

11. रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{12}$ तथा तल $x-y+z=5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से, बिन्दु (— 1, —5, —10) की दूरी ज्ञात कीजिए ।

12. बिन्दु (—1, 3, 2) से होकर जाने वाली तथा तल $x+2y+2z=3$ पर लम्ब रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए । इससे प्राप्त लम्ब की लम्बाई तथा उसके पाद के निर्देशांकों को भी ज्ञात कीजिए ।

13. बिन्दु (1, 2, 4) से होकर जाने वाली तथा रेखा

$$3x+2y-z=4,\ x-2y-2z=5$$

के समान्तर रेखा के समीकरणों को ज्ञात कीजिए ।

14. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनमें तल

$$3x-7y-5z=1 \text{ तथा } 5x-13y+3z+2=0$$

तल $$8x-11y+2z=0$$

को काटते हैं ।

15. बिन्दुओं (1, 0, — 1) और (3, 2, 2) से होकर जाने वाले तथा रेखा

$$x-1=\frac{1}{2}(1-y)=\frac{1}{3}(z-2)$$

के समांतर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

16. उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$ तथा बिन्दु (0, 3, 0) स्थित हैं।

17. रेखाओं

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+15}{-7}=\frac{z-9}{5}$$

तथा

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-9}{-3}$$

के बीच लघुतम दूरी की लम्बाई तथा लघुतम दूरी वाली रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. बिन्दु (5, 4, — 1) से रेखा

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{9}=\frac{z}{5}$$

पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

एकक VIII

गोला

8.1 परिभाषा

गोला (गोलक) [sphere] एक बिन्दु का बिन्दुपथ है जो आकाश में इस तरह चलता है कि इसकी एक स्थिर (fixed) बिन्दु से दूरी हमेशा स्थिर रहती है। स्थिर बिन्दु गोले का केन्द्र (centre) तथा स्थिर दूरी उसकी **त्रिज्या** (**radius**) कहलाती है।

8.1 गोले का व्यापक समीकरण

माना गोले का केन्द्र (a, b, c) है तथा इसकी त्रिज्या r है। हम गोले पर कोई बिन्दु (x, y, z) लेते हैं। तब इन दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी r होनी चाहिए। अतः, हम

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

अर्थात्, $$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

प्राप्त करते हैं, जो बिन्दु (x, y, z) का बिन्दुपथ है तथा इसलिए यह ही गोले की वांछित व्यापक समीकरण है। **इस व्यापक समीकरण को प्रायः**

$$\mathbf{x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0} \qquad (1)^*$$

के रूप में लिखा जाता है। हम देखते हैं कि व्यापक समीकरण (1) की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं :

(*i*) यह x, y, z में द्वितीय घात की समीकरण है, अर्थात् x, y, z में से प्रत्येक की अधिकतम घात 2 है।

(*ii*) x^2, y^2 तथा z^2 में से प्रत्येक के गुणांक बराबर हैं।

(*iii*) इसमें xy, yz और zx के प्रकार के कोई भी गुणन पद (product term) नहीं हैं।

विलोमतः **x, y, z में प्रत्येक द्विघात समीकरण जो उपर्युक्त तीनों विशेषताओं को सन्तुष्ट करती है, एक गोला निरूपित करती है।**

---

*गोले की व्यापक समीकरण को

$$ax^2+ay^2+az^2+2bx+2cy+2ez+f=0, \ (a\neq 0)$$

के रूप में भी लिख सकते हैं जो, a से विभाजित करने पर, (1) के रूप में परिवर्तित हो जाती है।

इसे सिद्ध करने के लिए हम समीकरण (1) को

$$(x+u)^2+(y+v)^2+(z+w)^2=u^2+v^2+w^2-d$$

के रूप में दुबारा लिखते हैं। यह समीकरण यह दर्शाती है कि चर (variable) x, y, z के सभी मानों के लिए बिन्दुओं (x, y, z) तथा $(-u, -v, -w)$ के बीच की दूरी हमेशा $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ है। क्योंकि व्यंजक $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ एक स्थिरांक है, इसलिए (1) द्वारा निरूपित बिन्दुपथ एक गोला है जिसका केन्द्र $(-u, -v, -w)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ है। हम देखते हैं कि $u^2+v^2+w^2-d \geqslant 0$ है।

एक विशिष्ट स्थिति को लेते हुए, हम देखते हैं कि उस गोले, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु है तथा त्रिज्या r है, का समीकरण

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

होता है।

8.3 चार बिन्दुओं से होकर जाने वाले गोले का समीकरण

हम देखते हैं कि गोले के व्यापक समीकरण में चार स्वैच्छिक स्थिरांक हैं। इस प्रकार, गोले का अद्वितीय समीकरण ज्ञात करने के लिए हमें चार प्रतिबन्धों की आवश्यकता है।

माना आकाश में चार बिन्दु (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), तथा (x_4, y_4, z_4) दिए हैं। ये बिन्दु इस तरह हैं कि ये एक ही तल में स्थित नहीं हैं तथा इन चारों बिन्दुओं से होकर एक गोला जा सकता है। अब हम इन चारों बिन्दुओं से होकर जाते हुए गोले का समीकरण निर्धारित करेंगे।

माना इन चारों बिन्दुओं से होकर जाने वाले गोले का समीकरण

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \qquad (1)$$

है। क्योंकि गोला दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाता है, अतः हम

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d=0 \qquad (2)$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+2ux_2+2vy_2+2wz_2+d=0 \qquad (3)$$

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2+2ux_3+2vy_3+2wz_3+d=0 \qquad (4)$$

$$x_4^2+y_4^2+z_4^2+2ux_4+2vy_4+2wz_4+d=0 \qquad (5)$$

प्राप्त करते हैं। यदि अब हम इन पाँचों समीकरणों से अज्ञात राशियाँ u, v, w, d विलुप्त कर दें, तो हमें गोले की वाँछित समीकरण प्राप्त हो जाएगी। इस विलुप्तीकरण के परिणाम को पाँचवें क्रम (fifth order) के एक सारणिक (determinant) के रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

पाँचवें क्रम के ऐसे सारणिक का प्रसार करना कठिन होता है। अतः किसी अंकीय प्रश्न को करते समय पाठक को चाहिए कि वह पहले समीकरणों (2) से (5) को u, v, w तथा d के मानों के लिए हल करे तथा फिर गोले का वाँछित समीकरण प्राप्त करने के लिए इन मानों को समीकरण (1) में रखे। इसको एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट किया जायेगा (देखिए उदाहरण 2, अनुच्छेद 8.4)।

8.4 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : दिखाइये कि एक बिन्दु का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार चलता है कि एक घन के सभी छः फलकों (faces) से इसकी दूरियों के वर्गों का योग स्थिर है, एक गोला है। इस गोले का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना घन के छः फलकों द्वारा निर्धारित तलों के समीकरण $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$, $z=0$ तथा $z=a$ हैं, जहाँ a घन की एक भुजा है। माना (α, β, γ) आकाश में एक बिन्दु है। इस बिन्दु से उपर्युक्त छः तलों की दूरियाँ क्रमशः α, $\alpha-a$, β, $\beta-a$, γ तथा $\gamma-a$ हैं। यदि इन दूरियों के वर्गों का योग एक स्थिरांक, माना, k है तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\alpha^2+(\alpha-a)^2+\beta^2+(\beta-a)^2+\gamma^2+(\gamma-a)^2=k$$

या, $$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2a\alpha-2a\beta-2a\gamma^2+3a^2=k$$

या, $$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a\alpha-a\beta-a\gamma=\frac{k}{2}-\frac{3a^2}{2}$$

अतः (α, β, γ) का बिन्दुपथ

$$x^2+y^2+z^2-ax-ay-az+\frac{3a^2}{2}-\frac{k}{2}=0$$

है, जो एक गोला है।

इस समीकरण की गोले की व्यापक समीकरण से तुलना करने पर, हमें केन्द्र

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

तथा त्रिज्या

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{2}+\frac{k}{2}}=\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{3a^2}{4}}$$

प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 2 : उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 2, 3), (—1, 1, 4), (0, 3, 3) तथा (1, 3, 2) से होकर जाता है।

हल : माना गोले का समीकरण

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \qquad (1)$$

है। क्योंकि यह गोला दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाता है, अतः हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2u+4v+6w+d=-14 \qquad (2)$$

$$-2u+2v+8w+d=-18 \quad (3)$$

$$6v+6w+d=-18 \quad (4)$$

तथा $$2u+6v+4w+d=-14 \quad (5)$$

समीकरण (3) को (2) में से, (3) को (4) में से तथा (4) को (5) में से घटाने पर, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$4u+2v-2w=4 \quad (6)$$

$$2u+4v-2w=0 \quad (7)$$

$$2u-2w=4 \quad (8)$$

समीकरण (8) को (7) में से घटाने पर, हम

$$4v=-4, \text{ अर्थात् } v=-1$$

प्राप्त करते हैं। v के इस मान को (6) तथा (7) में रखने पर, हम

$$4u-2w=6 \quad (9)$$

$$2u-2w=4 \quad (10)$$

प्राप्त करते हैं। (10) को (9) में से घटाने पर, हम

$$2u=2, \text{ अर्थात् } u=1$$

प्राप्त करते हैं। अतः (9) से हमें

$$w=-1$$

प्राप्त होता है। u, v और w के मानों को (2) में रखने पर हमें $d=-6$ प्राप्त होता है। u, v, w तथा d के मान (1) में रखने पर, हमें

$$x^2+y^2+z^2+2x-2y-2z-6=0$$

प्राप्त होता है, जो गोले की वाँछित समीकरण है।

उदाहरण 3 : बिन्दुओं (2, 3, 5) तथा (4, 9, —3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को व्यास मानकर निर्मित गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : बिन्दुओं (2, 3, 5) तथा (4, 9, —3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य-बिन्दु गोले का केन्द्र होगा।

इसलिए, गोले का केन्द्र

$$\left(\frac{1}{2}(2+4), \frac{1}{2}(3+9), \frac{1}{2}(5-3)\right)$$

अर्थात्, (3, 6, 1) है।

अब, केन्द्र तथा व्यास के किसी सिरे के बीच की दूरी गोले की त्रिज्या है। अतः, गोले की त्रिज्या $=\sqrt{(3-2)^2+(6-3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{26}$

इसलिए, गोले का समीकरण

$$(x-3)^2+(y-6)^2+(z-1)^2=26$$

अर्थात्, $x^2+y^2+z^2-6x-12y-2z+20=0$ है।

प्रश्नावली 8.1

1. उन गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके केन्द्र तथा त्रिज्याएँ नीचे दी गई हैं :
   (i) केन्द्र : (2, 3, 5), त्रिज्या : 3
   (ii) केन्द्र : (0, 2, 7), त्रिज्या : 2
   (iii) केन्द्र : (—2, —1, —4), त्रिज्या : 6
2. निम्नलिखित गोलों के केन्द्र तथा त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए :
   (i) $x^2+y^2+z^2+6x-8y+2z=0$
   (ii) $x^2+y^2+z^2+3x-4y-20=0$
3. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0) तथा (0, 0, 1) से होकर जाता है।
4. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (0, 0, 0), (—1, 2, 0), (0, 1, —1) तथा (1, 2, 5) से होकर जाता है।
5. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार चलता है कि बिन्दुओं (1, 2, 3), (2,—3, 5) तथा (0, 7, 4) से उसकी दूरियों के वर्गों का योग 120 रहता है।
6. एक बिन्दु $P(x, y, z)$ इस प्रकार है कि $3PA=2PB$ है, जहाँ A तथा B क्रमशः बिन्दु (1, 3, 4) तथा (1, —2, —1) हैं। बिन्दु P के बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा जाँच कीजिए कि यह बिन्दुपथ एक गोला है।
7. उन गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो चार तलों $x=0$, $y=0$, $z=0$ तथा $x+y+z=1$ को स्पर्श करते हैं तथा धनात्मक निर्देशांक तलों द्वारा परिसीमित (bounded) अष्टांशक (octant) में स्थित हैं।
   [**संकेत** : गोले के केन्द्र से चारों तलों पर डाले गए लम्बों की लम्बाइयाँ बराबर हैं, क्योंकि इनमें से प्रत्येक गोले की त्रिज्या के बराबर है।]
8. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो धनात्मक x, y और z अक्षों से क्रमशः a, b और c के अंतःखंड काटता है तथा मूलबिंदु से होकर जाता है।
9. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (1, 0, 0), (0, 1, 0) और (0, 0, 1) से होकर जाता है तथा जिसका केन्द्र तल $3x-y+z=2$ पर स्थित है।
10. दिखाइए कि बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाले रेखाखंड को व्यास मानकर निर्मित गोले का समीकरण
    $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$ है।
11. किसी गोले के एक व्यास के अंतःबिंदु धनात्मक y तथा धनात्मक z-अक्षों पर स्थित हैं तथा वे मूलबिंदु से क्रमशः 2 और 4 की दूरी पर हैं। दिखाइए कि वह गोला मूलबिंदु से होकर जाता है। इस गोले की त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।
12. $2a$ की भुजा के एक घन के अंतर्गत एक गोला है। यदि यह घन तलों $x=0$, $x=2a$, $y=0$, $y=2a$, $z=0$ तथा $z=2a$ द्वारा परिसीमित है, तो गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस गोले के उस व्यास का समीकरण भी ज्ञात कीजिए जो तल $3x-4y+5z+2=0$ पर लम्ब है।

कुछ असंतत एवं संतत प्रायिकता बंटन

एकक IX

कुछ विशेष असंतत प्रायिकता बंटन

9.1 भूमिका

पुस्तक IV में हमने असंतत यादृच्छिक चरों (discrete random variables) तथा उनके प्रायिकता बंटनों (probability distributions) के बारे में विचार किया था। अब हम कुछ विशेष असंतत प्रायिकता बंटनों (discrete probability distributions) के बारे में अध्ययन करेंगे जो सांख्यिकीय विश्लेषणों (statistical analysis) में अधिकतर आते रहते हैं तथा वहाँ एक बृहत् भूमिका निभाते हैं।

9.2 द्विपद या बर्नूली बंटन

इस बंटन का सूत्रण करने से पहले, हम एक सिक्का उछालने तथा एक पासा (die) फेंकने के दो विशेष उदाहरणों पर विचार करेंगे।

सिक्का उछालने में हमें केवल दो ही सम्भावित परिणाम, Head तथा Tail, प्राप्त होते हैं। हम इन दोनों में से एक घटना (event) के घटित होने (occurrence) को एक 'सफलता' (success) तथा दूसरी के घटित होने को एक 'असफलता' (failure) कह सकते हैं। यदि 'Head' आने को 'सफलता' तथा 'Tail' आने को 'असफलता' माना जाये, तो सफलता की प्रायिकता (probability) $\frac{1}{2}$ है तथा असफलता की प्रायिकता भी $\frac{1}{2}$ है। यदि अब हम एक सिक्के को, माना, 4 बार उछालें तथा यदि हम माना 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात करने के इच्छुक हों, तो हमें पहले सभी सम्भावनाओं की जाँच करनी चाहिए। अर्थात्, हमें यह जाँच करनी चाहिए कि सिक्के को 4 बार उछालने पर 2 सफलताएँ (और इसीलिए दो असफलताएँ) कितने प्रकार से प्राप्त हो सकती हैं। सफलता को S तथा असफलता को F से व्यक्त करने पर, हमें C (4, 2) सम्भावनाएँ प्राप्त होती हैं जो निम्न हैं :

SSFF, FFSS, FSFS, SFSF, SFFS, FSSF

क्योंकि सिक्के की किसी एक उछाल (toss) की घटनाएँ S तथा F, उसकी किसी अन्य उछाल की घटनाओं S तथा F से स्वतन्त्र (independent) हैं, इसलिए उपर्युक्त C (4, 2) सम्भावनाओं में से प्रत्येक में 2 सफलताएँ (और इसीलिए 2 असफलताएँ) प्राप्त करने की प्रायिकता $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

है। अतः, सिक्के को 4 बार उछालने पर, 2 सफलताएँ प्राप्त होने की वाँछित प्रायिकता $C\ (4, 2)\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$ है।

एक पासा फेंकने पर, यह स्पष्ट है कि यहाँ 6 सम्भव परिणाम हैं। आइये अब हम "संख्या 6 आने की घटना" को सफलता तथा किसी अन्य संख्या के आने की घटना को एक असफलता मान कर, इस पर विचार करें। सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ तथा असफलता की प्रायिकता $\frac{5}{6}$ है। माना पासे को 8 बार फेंका जाता है तथा हम 5 सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करने के इच्छुक हैं। स्पष्ट है, पासे को एक बार फेंकने तथा फिर उसे किसी अन्य बार फेंकने से प्राप्त सफलताओं तथा असफलताओं की घटनाएँ स्वतन्त्र हैं। अब, 5 सफलताओं को $C\ (8, 5)$ प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है, तथा एक विशेष क्रम में व्यवस्थित 5 सफलताएँ (और इसीलिए $8-5=3$ असफलताएँ) प्राप्त करने की प्रायिकता $\left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^3$ है। अतः, वाँछित प्रायिकता $C(8, 5) \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^3$ है।

प्रत्येक बार जब हम एक सिक्का उछालते हैं या एक पासा फेंकते हैं या कोई अन्य प्रयोग करते हैं, तब हम इसे एक **प्रयत्न (trial)** कहते हैं। उपर्युक्त दो उदाहरणों में जिनका वर्णन ऊपर हुआ है, हम देखते हैं कि एक सिक्के को उछालने में प्रयत्नों की संख्या 4 है तथा एक पासे को फेंकने में प्रयत्नों की संख्या 8 है। उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से हम यह भी देखते हैं कि प्रत्येक प्रयत्न में हमें केवल दो ही सम्भव परिणाम, अर्थात् सफलता और असफलता, ही प्राप्त होते हैं। साथ ही, किसी एक प्रयत्न का परिणाम किसी भी अन्य प्रयत्न के परिणाम से स्वतन्त्र है। ऐसे स्वतन्त्र प्रयत्न जिनमें केवल दो ही परिणाम होते हैं, जिन्हें प्रायः सफलता तथा असफलता कहते हैं, **बर्नूली प्रयत्न (Bernoulli trials)** कहलाते हैं। हमें यह भी देखते हैं कि ऐसे प्रत्येक प्रयत्न में सफलता या असफलता की प्रायिकता स्थिर रहती है।

अब हम बर्नूली प्रयत्नों का व्यापकीकरण करेंगे तथा द्विपद या बर्नूली बंटन का सूत्रण करेंगे।

माना एक प्रयोग में n स्वतन्त्र प्रयत्न हैं तथा माना एक यादृच्छिक चर (random variable) X, इन n प्रयत्नों में प्राप्त सफलताओं की संख्या व्यक्त करता है। माना किसी भी एक प्रयत्न में सफलता की प्रायिकता p तथा असफलता की प्रायिकता q है, जिससे $p+q=1$ है। हम यह मानते हैं कि प्रयत्न स्वतन्त्र हैं तथा प्रत्येक प्रयत्न के लिए p स्थिर है। अब हम n प्रयत्नों में r सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए एक सूत्र निकालेंगे। अब, r सफलताओं तथा $n-r$ असफलताओं को प्राप्त करने का एक विशेष क्रम निम्न है :

$$\underbrace{SSSS\ldots S}_{r \text{ सफलताएँ}} \quad \underbrace{FFFF\ldots F}_{(n-r) \text{ असफलताएँ}}$$

इसलिए,

$$P(\underbrace{SSSS\cdots S}_{r \text{ बार}} \quad \underbrace{FFFF\ldots F}_{(n-r) \text{ बार}})$$

$$=\underbrace{P(S)P(S)\ldots P(S)}_{r \text{ गुणनखंड}} \quad \underbrace{P(F)P(F)\ldots P(F)}_{(n-r) \text{ गुणनखंड}}$$

$$=p^r q^{n-r}$$

इस प्रकार, हम एक विशेष निश्चित क्रम में r सफलताएँ तथा $n-r$ असफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकता $p^r q^{n-r}$ प्राप्त करते हैं। परन्तु हम उस प्रायिकता को ज्ञात करने के इच्छुक हैं जब कोई भी r प्रयत्न सफलताएँ हैं। क्योंकि n प्रयत्नों में r सफलताएँ प्राप्त करने के सभी प्रकारों की संख्या $C(n, r)$ है, इसलिए वांछित प्रायिकता

$$P(X=r)=C(n, r)\ p^r q^{n-r} \qquad (1)$$

से दी जा सकती है, जहाँ $p+q=1$ है तथा $r=0, 1, 2, \ldots, n$ है।

हम प्राय: $P(X=r)$ को $P(r)$ लिखते हैं। बंटन (distribution) (1) **द्विपद प्रायिकता बंटन (binomial probability distribution)** कहलाता है तथा X **द्विपद चर (binomial variable)** कहलाता है। इसे स्विटजरलैंड के एक गणितज्ञ जेम्स बर्नूली (**James Bernoulli**) [**1654—1705**] के नाम पर, जिन्होंने अठारहवीं शताब्दी के प्रारम्भ में इस बंटन का आविष्कार किया था, **बर्नूली बंटन (Bernoulli distribution)** भी कहते हैं।

यहाँ यह देखने की बात है कि (1) में $r=0, 1, 2, \ldots, n$ के लिए उत्तरोत्तर (successive) प्रायिकताएँ $(q+p)^n$ के द्विपद प्रसार के उत्तरोत्तर पद हैं और यही कारण है कि इस बंटन को "द्विपद" बंटन कहते हैं। r के मान तथा उनकी तदनुरूपी प्रायिकताएँ $P(r)$ सारणी 9.1 में नीचे दी गई हैं :

सारणी 9.1 : यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन

$X=r$	$P(r)$
0	q^n
1	$C(n, 1)\ p\ q^{n-1}$
2	$C(n, 2)\ p^2 q^{n-2}$
3	$C(n, 3)\ p^3 q^{n-3}$
⋮	⋮
n	p^n

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त प्रत्येक प्रायिकता एक ऋणेतर (non-negative) भिन्न है तथा इन सभी प्रायिकताओं का योग 1 है, क्योंकि यह $(q+p)^n=(1)^n=1$ के बराबर है, जहाँ n प्रयत्नों की संख्या है।

द्विपद बंटन में आने वाले n तथा p बंटन के **प्राचल (parameters)** कहलाते हैं।

किसी प्रश्न को हल करने में द्विपद बंटन के सूत्र (1) का प्रयोग करते समय, पाठक को पहले यह जान लेनी चाहिए कि बर्नूली प्रयत्नों के सभी प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होते हैं या नहीं। ये प्रतिबन्ध नीचे दिये गये हैं :

(1) इसमें प्रयत्नों की संख्या परिमित (finite) होनी चाहिए।

(2) प्रत्येक प्रयत्न में केवल दो ही संभव परिणाम होने चाहिए जो प्राय: सफलता तथा असफलता कहलाते हैं।

(3) सभी प्रयत्न स्वतन्त्र होने चाहिए।
(4) सभी प्रयत्नों के लिए सफलता या असफलता की प्रायिकता स्थिर रहनी चाहिए।

9.3 द्विपद बंटन के लिए पुनरावृत्ति या प्रतिवर्तन सूत्र

हम जानते हैं कि $P(r) = C(n, r)\, p^r q^{n-r}$

तथा, $P(r+1) = C(n, r+1)\, p^{r+1} q^{n-r-1}$

इसलिए,
$$\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{n!\, p^{r+1} q^{n-r-1}}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!\, p^r q^{n-r}}$$
$$= \left(\frac{n-r}{r+1}\right)\frac{p}{q}$$

इसलिए,
$$P(r+1) = \left(\frac{n-r}{r+1}\right)\frac{p}{q}\, P(r) \qquad (2)$$

(2) ही वाँछित **पुनरावृत्ति (recurrence)** या **प्रतिवर्तन सूत्र (recursion formula)** है। यदि P(0) ज्ञात हो, तो इस सूत्र का उत्तरोत्तर प्रयोग करके हम प्रायिकताएँ P(1), P(2), P(3), इत्यादि ज्ञात कर सकते हैं।

इस प्रकार, जब $r=0$, तब (2) से हम

$$P(1) = n.\frac{p}{q}\, P(0)$$

प्राप्त करते हैं। परन्तु $P(0) = p^0 q^n = q^n$ है।

इसलिए, $P(1) = n\, p\, q^{n-1}$

पुनः, $r=1$ रखने पर, हम

$$P(2) = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{p}{q}\, P(1)$$

$$= \frac{n-1}{2}\cdot\frac{p}{q}\cdot npq^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}\, p^2 q^{n-2}$$

प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार आगे भी हम प्रायिकताएँ ज्ञात कर सकते हैं।

9.4 द्विपद बंटन का माध्य (या प्रत्याशा) और प्रसरण

हम सीख चुके हैं कि यदि किसी यादृच्छिक चर X के मानों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ की तदनुरूपी प्रायिकताएँ $p_1, p_2, \ldots p_n$ हों, तो प्रायिकता बंटन का माध्य (mean) μ निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (3)$$

यह यादृच्छिक चर X के प्रायिकता बंटन का **औसत (average)** या **प्रत्याशित मान (expected value)** या **प्रत्याशा (expectation)** भी कहलाता है तथा इसे सामान्यतः $E(X)$ से व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार,
$$E(X)=\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{4}$$

अब हम द्विपद बंटन का माध्य ज्ञात करते हैं। द्विपद बंटन के लिए, $P(r)=C(n, r)\ p^r q^{n-r}$ तथा $x_r=r$ है।

अतः, (4) से हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$E(X)=\mu=\sum_{r=0}^{n} r\,P(r)=\sum_{r=0}^{n} r\,C(n, r)\,p^r\,q^{n-r}$$
$$=1\,C(n, 1)p\,q^{n-1}+2C(n, 2)\,p^2\,q^{n-2}+\ldots+np^n$$
$$=npq^{n-1}+\frac{2n(n-1)}{2!}p^2\,q^{n-2}+\ldots+np^n$$
$$=np\left[q^{n-1}+(n-1)p\,q^{n-2}+\frac{(n-1)\ (n-2)}{2!}p^2\,q^{n-3}+\cdots+p^{n-1}\right]$$
$$=np\ (q+p)^{n-1}$$
$$=np \qquad \text{(क्योंकि } q+p=1 \text{ है)}$$

इस प्रकार, **द्विपद बंटन का माध्य np है।**

द्विपद बंटन का प्रसरण (variance) σ^2 प्राप्त करने के लिए, आपको याद होगा कि σ^2 निम्न सूत्र से दिया जाता है :

$$\sigma^2=\sum_{r=0}^{n} x_r^2\,P(r)-\mu^2$$

द्विपद बंटन के लिए, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\sigma^2=\sum_{r=0}^{n} r^2\,C(n, r)\,p^r\,q^{n-r}-\mu^2$$
$$=\sum_{r=0}^{n}\{r+r(r-1)\}C(n, r)p^r\,q^{n-r}-\mu^2$$
$$=\sum_{r=0}^{n} r\,C(n, r)\,p^r\,q^{n-r}+\sum_{r=0}^{n} r(r-1)C(n, r)\,p^r\,q^{n-r}-\mu^2$$
$$=np+\sum_{r=2}^{n} r(r-1)C(n, r)\,p^r\,q^{n-r}-\mu^2 \tag{A}$$

(क्योंकि $r=0$ तथा $r=1$ का योगदान शून्य है तथा $\sum_{r=0}^{n} r\,C(n, r)p^r\,q^{n-r}=\mu=np$ है।)

अब, $\sum_{r=2}^{n} r(r-1)C(n, r)p^r q^{n-r}$

$$= \sum_{r=2}^{n} r(r-1)\times \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{(r-2)!} p^r q^{n-r}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{r=2}^{n} C(n-2, r-2)\, p^{r-2} q^{n-r}$$

$$= n(n-1)p^2(q+p)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2$$

अतः, (A) से हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\sigma^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p) = npq$$

इस प्रकार, **द्विपद बंटन का प्रसरण npq है ।**

9.5 द्विपद बंटन के लिए आयतचित्र

द्विपद प्रायिकता बंटन के लिए आयतचित्र (histogram) बनाने की विधि वही है जो बारंबारता बंटनों (frequency distributions) के आयतचित्र बनाने में प्रयोग की जाती है । हम r के विभिन्न मानों को क्षैतिज अक्ष (horizontal axis) के अनुदिश अंकित करते हैं तथा उनकी तदनुरूपी प्रायिकताओं $P(r)$ को ऊर्ध्वाधर अक्ष (vertical axis) के अनुदिश अंकित करते हैं । फिर r के विभिन्न मानों के लिए, समान चौड़ाई के आयत बनाये जाते हैं । प्रत्येक आयत, उस r-मान पर केन्द्रित होता है जिसकी वह प्रायिकता निरूपित करता है । ये आयत वाँछित आयतचित्र को निरूपित करेंगे । उदाहरणों की सहायता से यह दिखाया जायेगा कि द्विपद बंटन का आयतचित्र $p=q=\frac{1}{2}$ के लिए सममित (symmetrical) होता है तथा $p \neq q$ के लिए यह असममित (un-symmetrical) होता है । यदि प्रत्येक आयत की चौड़ाई को एक मात्रक लम्बाई (unit length) की माना जाये, तो प्रत्येक का क्षेत्रफल तदनुरूपी प्रायिकता को निरूपित करेगा ।

9.6 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : एक पासा 6 बार फेंका जाता है । यदि "एक विषम संख्या प्राप्त करना" एक "सफलता" है, तो

(*i*) 5 सफलताएँ

(*ii*) कम से कम 5 सफलताएँ

(*iii*) अधिक से अधिक 5 सफलताएँ

प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है ?

हल : हम पहले एक प्रयत्न में सफलता की प्रायिकता p तथा असफलता की प्रायिकता q ज्ञात करेंगे। एक पासा फेंकने में विषम संख्याएँ 1, 3 या 5 प्राप्त करना एक सफलता है। अतः, p=P (संख्या 1 प्राप्त करना)+P (संख्या 3 प्राप्त करना)+P(संख्या 5 प्राप्त करना)

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}$$

तथा, $$q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

पाठक इस बात की जाँच कर सकते हैं कि यहाँ द्विपद बंटन का प्रत्येक प्रतिबंध संतुष्ट होता है।

(*i*) यहाँ, $n=6,\ p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2},\ r=5$ है।

इसलिए, $$P(5)=C(6,5)\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{6}{2^6}=\frac{3}{32}$$

(*ii*) P (कम से कम 5 सफलताएँ)

$$=P(5)+P(6)$$

$$=C(6,5)\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}$$

(*iii*) P (अधिक से अधिक 5 सफलताएँ)

$$=1-P(6)$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\frac{63}{64}$$

उदाहरण 2 : पासों का एक युग्म 4 बार फेंका जाता है। यदि दोनों पासों पर एक ही संख्या के आने को सफलता माना जाये, तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

हल : अब दोनों पासों पर एक ही संख्या, अर्थात् 11, 22, 33, 44, 55 या 66 आने की प्रायिकता p, $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ है।

इसलिए, $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

इसलिए, $P(2)=C(4, 2)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$$=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{5^2}{6^4}=\frac{25}{216}$$

उदाहरण 3 : वस्तुओं के एक बड़े समूह में 5% वस्तुएँ खराब हैं। 10 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श (sample) में एक से अधिक खराब वस्तु न होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : यहाँ, $p=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$, $q=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$ तथा $n=10$ है।

इसलिए वाँछित प्रायिकता,

$$=P(\text{कोई खराब नहीं})+P(1\text{ खराब})$$

$$=\left(\frac{19}{20}\right)^{10}+C\ (10, 1)\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$$

$$=\left(\frac{19}{20}\right)^9\left(\frac{19}{20}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{19}{20}\right)^9\times\left(\frac{29}{20}\right)$$

उदाहरण 4 : एक सिक्के को 5 बार उछालने से प्राप्त Heads की संख्या के द्विपद प्रायिकता बंटन के लिए एक आयतचित्र खींचिये।

हल : 5 बार उछालने पर यह हो सकता है कि कोई भी Head न हो, 1 Head हो, 2 Heads हों, 3 Heads हों, 4 Heads हों, या 5 Heads हों। अतः, हम $r=0, 1, 2, 3, 4$ तथा 5 के लिए प्रायिकताएँ $P(r)$ ज्ञात करेंगे।

यहाँ, $n=5$, $p=\frac{1}{2}$ और $q=\frac{1}{2}$ है।

इसलिए,

$$P(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=0.03125$$

$$P(1)=5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4=0.15625$$

$$P(2)=C\ (5, 2)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.31250$$

$$P(3)=C\ (5, 3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=0.31250$$

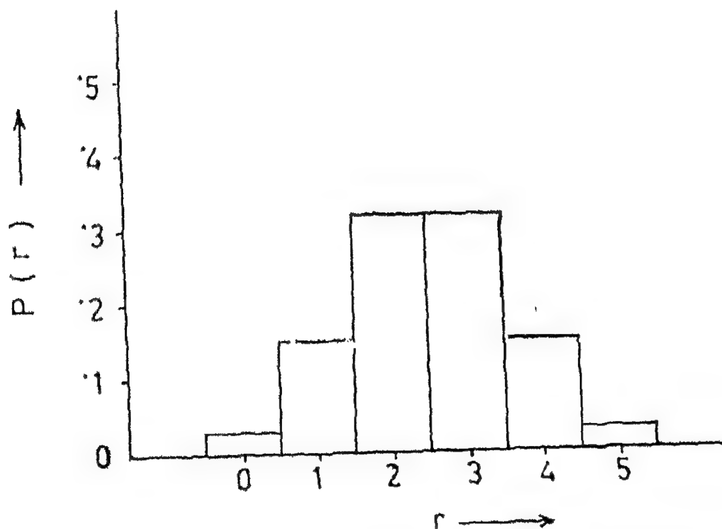
$$P(4)=C\ (5, 4)\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=0.15625$$

$$P(5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=0.03125$$

प्रायिकताएँ P(1),..., P(5) पुनरावृत्ति सूत्र (recurrence formula) (2) की सहायता से भी ज्ञात की जा सकती हैं। हम इन्हें निम्न प्रकार सारणीबद्ध करते हैं :

r	0	1	2	3	4	5
$P(r)$	0.03125	0.15625	0.31250	0.31250	0.15625	0.03125

हम r के विभिन्न मानों को क्षैतिज अक्ष के अनुदिश तथा उनकी तदनुरूपी प्रायिकताओं को ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश अंकित करते हैं। फिर हम समान चौड़ाई के आयत खींचते हैं जैसाकि आकृति 9.1 में दिखाया गया है।



आकृति : 9.1 : सिक्के को 5 बार उछालने से प्राप्त Heads की संख्या के द्विपद प्रायिकता बंटन के लिए आयतचित्र

पाठक यह देख सकते हैं कि उपर्युक्त आयतचित्र माध्य $= np = \frac{5}{2} = 2.5$ के सापेक्ष सममित है, क्योंकि $p = q = \frac{1}{2}$ है। यदि $p \neq q$ हो, तो आयतचित्र सममित नहीं होगा, जैसा कि हम अगले उदाहरण में देखेंगे :

उदाहरण 5 : $p=\frac{1}{3}$ तथा $n=5$ लेकर द्विपद बंटन के पुनरावृत्ति सूत्र (2) की सहायता से $r=1, 2, 3, 4$ तथा 5 के लिए $P(r)$ के मान परिकलित कीजिए । फिर इस बंटन के लिए एक आयत-चित्र खींचिये ।

हल : हम जानते हैं कि

$$P(r+1)= \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot P(r)$$

$p= \frac{1}{3}$, $q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ तथा $n=5$ रखने पर, हम

$$P(r+1)= \frac{5-r}{2(r+1)} P(r) \qquad (A)$$

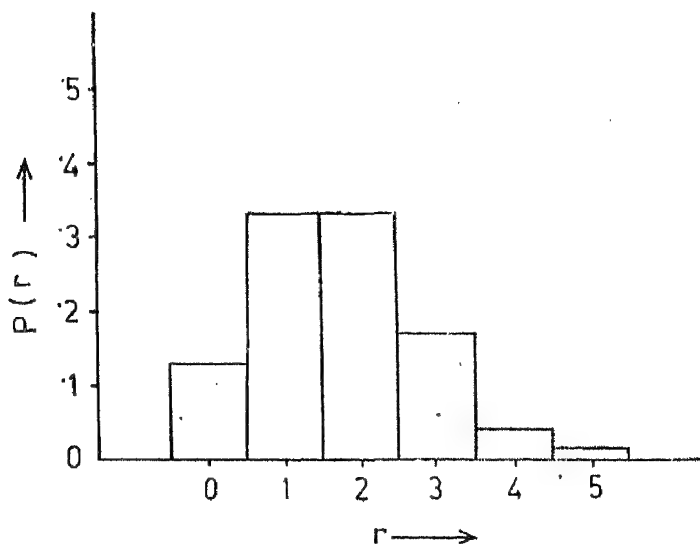
प्राप्त करते हैं ।

अब, $P(0)=q^n=\left(\frac{2}{3}\right)^5=0.1317$

(A) में $r=0, 1, 2, 3$ तथा 4 रखने पर हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$P(1)=\frac{5}{2}P(0)=\frac{5\times 0.1317}{2}=0.3292$$

$$P(2)=P(1)=0.3292$$



आकृति 9.2 : $p=\frac{1}{3}$ तथा $n=5$ के लिए द्विपद बंटन का आयतचित्र

$$P(3) = \frac{3}{6}\ P(2) = \frac{0.3292}{2} = 0.1646$$

$$P(4) = \frac{2}{8}\ P(3) = \frac{0.1646}{4} = 0.0412$$

$$P(5) = \frac{1}{10} P(4) = 0.0041$$

उपर्युक्त द्विपद प्रायिकता बंटन के लिए आयतचित्र आकृति 9.2 में दिखाया गया है।

पाठक यह देख सकते हैं कि उपर्युक्त आयतचित्र सममित नहीं है।

उदाहरण 6 : पासे को एक बार फेंकने पर बिन्दुओं (points या dots) की संख्या की प्रत्याशा (expectation) क्या है ?

हल : माना यादृच्छिक चर X पासे के फेंकने पर आने वाले बिन्दुओं की संख्या को व्यक्त करता है। यह देखना सरल है कि X, मानों 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 में से कोई भी मान ले सकता है तथा इनमें से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

X :	1	2	3	4	5	6
P(X) :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

इसलिए, $$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{21}{6}$$

$$= 3.5$$

उदाहरण 7 : एक सिक्के को 15 बार उछालने पर प्राप्त Heads की संख्या की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए।

हल : माना सिक्के को एक बार उछालने पर Head आने की प्रायिकता p है। यह बंटन, एक द्विपद बंटन है जिसमें $n=15$ तथा $p=\frac{1}{2}$ है। इसलिए, प्रत्याशा $= E(X) = np = 15 \times \frac{1}{2} = 7.5$ है।

उदाहरण 8 : एक पासा 20 बार फेंका जाता है। 4 से अधिक संख्या आने को सफलता मानते हैं। सफलताओं की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $n=20$ है।

साथ ही, $p = P$ (संख्या 5 प्राप्त करना) $+ P$ (संख्या 6 प्राप्त करना)

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

तथा, $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

इसलिए, $\mu = np = \frac{20}{3} = 6.67$ (लगभग)

तथा, $\sigma^2 = npq = 20 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{40}{9} = 4.44$ (लगभग)

उदाहरण 9 : फुटकर बाजार में बेचे गये एक विशेष प्रकार के बीजों में से लगभग 70% अंकुरित होते हैं जबकि उन्हें सामान्य परिस्थितियों में बोया जाता है। मान लीजिए कि एक पैकिट में 10 बीज हैं। यदि इनको बोया जाये, तो इनमें से 2 के अंकुरित होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : यदि अंकुरण की कुल संख्या r हो, तो हम यह मानेंगे कि r का एक द्विपद बंटन है। यहाँ $p = 0.7$, $n = 10$ तथा $q = 0.3$ है।

इसलिये,
$$P(2) = C(10, 2)\ (0.7)^2\ (0.3)^8$$
$$= \frac{10 \times 9}{2} \times 0.49 \times 0.000066$$
$$= 0.00146 \text{ (लगभग)}$$

प्रश्नावली 9.1

1. एक बक्स में 100 बल्ब हैं, जिनमें से 10 खराब हैं। 5 बल्बों के एक प्रतिदर्श में निम्नलिखित की प्रायिकता क्या है ?
   (*i*) कोई भी बल्ब खराब नहीं है।
   (*ii*) केवल 2 ही बल्ब खराब हैं।

2. एक पासा 6 बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि
   (*i*) कोई इक्का* (ace) नहीं आता ?
   (*ii*) एक से अधिक इक्के नहीं आते ?
   (*iii*) 4 से अधिक इक्के आते हैं ?
   इक्कों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण भी ज्ञात कीजिए।

3. एक उत्पादन में 5% वस्तुएँ खराब हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि 8 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में 2 से कम वस्तुएँ खराब होंगी ?

4. अच्छी तरह से फेंटी गई 52 ताशों की एक गड्डी में से 5 ताश एक-एक करके प्रतिस्थापित करते हुए निकाले जाते हैं। इसकी प्रायिकता क्या होगी कि
   (*i*) पाँचों ताश हुकुम (spades) के हैं ?

*इक्के से हमारा तात्पर्य पासे पर संख्या 1 (या एक बिन्दु) से है।

(*ii*) केवल 3 ताश हुकुम के हैं ?

(*iii*) हुकुम का कोई भी ताश नहीं है ?

5. एक कारखाने में बने एक बल्ब के 100 दिन तक प्रयोग करने के बाद फ्यूज़ (fuse) हो जाने की प्रायिकता 0.05 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार के 5 बल्बों में से 100 दिन तक प्रयोग करने के बाद

(*i*) कोई भी बल्ब फ्यूज़ नहीं होगा।

(*ii*) एक से अधिक बल्ब फ्यूज़ नहीं होंगे।

(*iii*) एक से अधिक बल्ब फ्यूज़ होंगे।

(*iv*) कम से कम एक बल्ब फ्यूज़ होगा।

6. एक थैले में 10 गेंदें हैं तथा प्रत्येक पर 0 से 9 तक के अंकों में से एक अंक अंकित है। यदि थैले में से चार गेंदें प्रतिस्थापित करते हुए एक-एक करके निकाली जायें, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि किसी भी गेंद पर अंक 0 अंकित नहीं है ?

7. पासों का एक युग्म 7 बार फेंका जाता है। यदि योग 7 प्राप्त होने को सफलता माना जाये, तो निम्नलिखित की प्रायिकता क्या है ?

(*i*) कोई सफलता नहीं।

(*ii*) 6 सफलताएँ।

(*iii*) कम से कम 6 सफलताएँ।

(*iv*) अधिक से अधिक 6 सफलताएँ।

8. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल तथा 8 काली गेंदें है। यदि प्रतिस्थापित करते हुए 4 गेंदें एक-एक करके निकाली जायें, तो निम्नलिखित की प्रायिकता क्या है ?

(*i*) कोई भी गेंद सफेद नहीं है।

(*ii*) सभी गेंदें सफेद हैं।

(*iii*) केवल दो गेंदें सफेद हैं।

9. एक डिब्बे में 100 टिकट (ticket) हैं तथा प्रत्येक पर 1 से 100 तक की संख्याओं में से कोई एक संख्या अंकित है। यदि डिब्बे में से प्रतिस्थापित करते हुए 5 टिकट निकाले जायें, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि प्रत्येक टिकट पर अंकित संख्या 10 से विभाज्य है।

10. एक थैले में 25 गेंदें हैं, जिनमें से 10 गेंदों पर चिह्न 'X' अंकित है तथा शेष 15 पर चिह्न 'Y' अंकित है। थैले में से एक गेंद यादृच्छिक रूप से (randomly) निकाली जाती है और फिर इसके चिह्न को लिखकर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। यदि इस प्रकार 6 गेंदें निकाली गई हों, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(*i*) प्रत्येक गेंद पर चिह्न 'X' अंकित होगा।

(*ii*) 2 से अधिक गेंदों पर चिह्न 'Y' अंकित नहीं होगा।

(*iii*) 'X' चिह्न तथा 'Y' चिह्नों वाली गेंदों की संख्या बराबर होगी।

(*iv*) कम से कम एक गेंद पर चिह्न 'Y' अंकित होगा।

चिह्न 'X' से अंकित गेंदों की संख्या का माध्य भी ज्ञात कीजिये।

11. एक बाधा दौड़ (hurdle race) में एक खिलाड़ी को 10 बाधाएँ पार करनी हैं। प्रत्येक बाधा को पार करने की प्रायिकता 5/6 है। इसकी प्रायिकता क्या होगी कि वह 2 से कम बाधाओं (hurdles) को गिरा देगा ?

12. किसी समय यदि 5 टेलीफोन लाइनों (telephone lines) में से किसी एक के व्यस्त होने की प्रायिकता 0.01 हो, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि सभी लाइनें व्यस्त हैं ? इसकी प्रायिकता क्या है कि तीन से अधिक लाइनें व्यस्त नहीं हैं ?

13. $n=5$ तथा $p=\frac{1}{6}$ लेकर द्विपद बंटन के पुनरावृत्ति सूत्र की सहायता से $r=1, 2, 3, 4$ तथा 5 के लिए $P(r)$ के मान परिकलित कीजिये। फिर इस बंटन के लिए एक आयतचित्र खींचिये।

14. मान लीजिये कि किसी एक प्रकार के रेडियो सेट (radio set) में रेडियो ट्यूब (radio tube) लगाने पर उसके 500 घंटों से अधिक कार्य करने की प्रायिकता 0.2 है। यदि हम ऐसी 4 ट्यूबों का परीक्षण करें, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि इनमें से केवल k ट्यूब ही 500 घंटों से अधिक कार्य करेंगी, जहां $k=0, 1, 2, 3$ और 4 है। इस बंटन के लिए एक आयत-चित्र भी खींचिये।

15. यदि किसी द्विपद बंटन के माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 तथा 6 हैं, तो वह बंटन ज्ञात कीजिये।

16. यदि 5 प्रयत्नों के लिए किसी द्विपद बंटन के माध्य तथा प्रसरण का योग 1.8 है, तो वह बंटन ज्ञात कीजिये।

9.7 प्वासों प्रायिकता बंटन

पिछले अनुच्छेद में हम देख चुके हैं कि यदि किसी द्विपद बंटन के प्राचल (parameters) n तथा p ज्ञात हों, तो हम वह बंटन ज्ञात कर सकते हैं। परन्तु उन परिस्थितियों में जब n बहुत बड़ा हो तथा p बहुत छोटा हो, तो द्विपद बंटन का अनुप्रयोग बहुत कठिन होता है। ऐसी स्थितियों में यदि हम यह मान लेते हैं कि जब $n\to\infty$ तथा $p\to 0$, तब गुणन np हमेशा परिमित, माना λ, रहता है, तो जो हमें प्राप्त होता है वह द्विपद बंटन का **प्वासों सन्निकटन (Poisson approximation)** कहलाता है। यहाँ हम द्विपद बंटन का प्वासों सन्निकटन निर्धारित करेंगे।

क्योंकि $np=\lambda$ है, इसलिए $p=\frac{\lambda}{n}$ होगा।

द्विपद बंटन से, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$P(X=r)=C(n, r)p^r\ q^{n-r}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\times p^r\times(1-p)^{n-r}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}\times\frac{\lambda^r}{n^r}\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r}$$

$$= \frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\times\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r}$$

$$= \frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\frac{\left\{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right\}^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r} \qquad \text{(A)}$$

अब हम सीमाओं (limits) के एक बहुत महत्वपूर्ण परिणाम का प्रयोग करेंगे। हम इस परिणाम को बिना उपपत्ति दिये दे रहे हैं, जो निम्न है :

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{सीमा}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{(B)}$$

जहाँ e एक स्थिरांक है जो संख्याओं 2 तथा 3 के बीच स्थित है तथा e^x निम्न प्रकार परिभाषित होता है, जहाँ x कोई वास्तविक संख्या है :

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\infty \text{ तक} \qquad \text{(C)}$$

स्थिरांक e, नपेरियन आधार (Naperian base) कहलाता है तथा इसका मान लगभग 2.7183 है। (A)से हम देखते हैं कि जब $n\to\infty$, तब प्रत्येक गुणनखण्ड $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots,$ $\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$ तथा गुणनखण्ड $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r$, 1 की ओर अग्रसर होता है। साथ ही, (B) से हम देखते हैं कि जब $-\frac{n}{\lambda}\to-\infty$, अर्थात् जब $n\to\infty$, तो गुणनखण्ड $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}$, e की ओर अग्रसर होता है। इस प्रकार जब $n\to\infty$, तब $\left\{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right\}^{-\lambda} \to e^{-\lambda}$ होगा। अतः जब $n\to\infty$, तब (A) में दिया व्यंजक $\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$ की ओर अग्रसर होता है।

अतः, सीमांत स्थिति में जब $n\to\infty$, हम

$$P(X=r)=\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}, \quad (r=0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (5)$$

प्राप्त करते हैं, जहाँ λ एक परिमित संख्या है तथा np के बराबर है। (5) में $r=0, 1, 2, \ldots$ रखकर तथा सभी प्रायिकताओं को जोड़ने पर, हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं :

$$\text{योग} = e^{-\lambda} + \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \dots$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= e^{-\lambda} . e^{\lambda} \qquad [\text{(C) से}]$$

$$= 1$$

इस प्रकार, $r=0, 1, 2, \dots$ के लिए प्रायिकताओं $P(r)$ का योग 1 के बराबर है।

साथ ही, उपर्युक्त में से प्रत्येक प्रायिकता एक ऋणेतर भिन्न है। अतः (5) एक प्रायिकता बंटन निरूपित करता है जिसे एक फ्राँसीसी गणितज्ञ प्वासों (Poisson) के नाम पर, जिन्होंने यह तरीका 1837 में विकसित किया था, **प्वासों प्रायिकता बंटन (Poisson probability distribution)** कहते हैं। यह असंतत (discrete) बंटन केवल एक प्राचल λ पर निर्भर करता है।

द्विपद बंटन के प्वासों सन्निकटन को द्विपद बंटन की अपेक्षा सरलता से तुरन्त परिकलित किया जा सकता है तथा सरलता से सारणीबद्ध किया जा सकता है, क्योंकि λ के विभिन्न मानों के लिए $e^{-\lambda}$ के मान मानक सारणियों (standard tables) से प्राप्त हो जाते हैं।

दैनिक जीवन में ऐसी बहुत-सी स्थितियाँ हैं, जहाँ n बहुत बड़ा तथा p बहुत छोटा होता है। ऐसी स्थितियों में द्विपद बंटन की अपेक्षा, जो n के बड़े मानों के लिए अधिक कठिन सिद्ध हो सकता है, प्वासों बंटन अधिक सुविधापूर्वक प्रयोग किया जा सकता है। टेलीफोन ट्रंक लाइनें जबकि उनके अंशदाताओं (subscribers) की संख्या अधिक होती है और टेलीफोन लाइन खाली मिलने की प्रायिकता बहुत कम होती है, यातायात समस्याएँ जिनमें बार-बार दुर्घटनाओं जैसी घटनाएँ होती हैं और इनकी प्रायिकता बहुत कम होती है तथा बहुत-सी औद्योगिक प्रक्रियाओं में जहाँ भारी मात्रा में उत्पादन होता है और दोषों (faults) या बिजली, इत्यादि बन्द होने (breakdowns) जैसी घटनाओं की प्रायिकता बहुत कम होती है, इत्यादि, ऐसी स्थितियों के कुछ उदाहरण हैं।

9.8 प्वासों बंटन के लिए पुनरावृत्ति-सूत्र

हम जानते हैं कि

$$P(r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} \qquad (6)$$

तथा, $$P(r+1) = \frac{\lambda^{r+1} e^{-\lambda}}{(r+1)!}$$

इसलिए, $$\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{\lambda}{r+1}$$

या, $$P(r+1) = \frac{\lambda}{r+1} P(r), \qquad (r=0, 1, 2, 3, \dots) \qquad (7)$$

प्वासों बंटन के लिए (7) पुनरावृत्ति सूत्र है। यदि $P(0)$ ज्ञात हो, तो इस सूत्र की सहायता से हम $P(1), P(2), P(3)\cdots$ के मान ज्ञात कर सकते हैं। समीकरण (6) से, $r=0$ के लिए, हम देखते हैं कि $P(0)=e^{-\lambda}$ है।

पुनरावृत्ति सूत्र (7) में $r=0, 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर,

हम $P(1)=\lambda e^{-\lambda}$, $\quad P(2)=\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$, $\quad P(3)=\dfrac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$,

इत्यादि प्राप्त करते हैं।

9.9 प्वासों बंटन के माध्य तथा प्रसरण

प्वासों बंटन में

$$P(r)=\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

होता है।

अतः,
$$E(X)=\mu=\sum_{r=0}^{\infty} rP(r)=\sum_{r=0}^{\infty} r.\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$
$$=1.\lambda e^{-\lambda}+2.\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}+3.\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}+\ldots$$
$$=\lambda e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots\right)$$
$$=\lambda e^{-\lambda}.e^{\lambda}=\lambda$$

इस प्रकार, प्वासों बंटन का माध्य, प्राचल λ के बराबर है।

प्रसरण σ^2 निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है :

$$\sigma^2=\sum_{r=0}^{\infty} r^2.\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}-\mu^2$$
$$=e^{-\lambda}\left[\frac{1^2.\lambda}{1!}+\frac{2^2.\lambda^2}{2!}+\frac{3^2.\lambda^3}{3!}+\frac{4^2.\lambda^4}{4!}+\frac{5^2.\lambda^5}{5!}+\ldots\right]-\lambda^2$$
$$=\lambda e^{-\lambda}\left[1+\frac{2\lambda}{1!}+\frac{3\lambda^2}{2!}+\frac{4\lambda^3}{3!}+\frac{5\lambda^4}{4!}+\ldots\right]-\lambda^2$$
$$=\lambda e^{-\lambda}\left[1+\frac{(1+1)\lambda}{1!}+\frac{(1+2)\lambda^2}{2!}+\frac{(1+3)\lambda^3}{3!}+\frac{(1+4)\lambda^4}{4!}+\ldots\right]-\lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\ldots\right) + \lambda\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^4}{4}+\ldots\right)\right]-\lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}(e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda})-\lambda^2$$

$$= \lambda+\lambda^2-\lambda^2$$

$$= \lambda$$

अतः, प्वासों बंटन का प्रसरण भी λ है। इस प्रकार, प्वासों बंटन का माध्य तथा प्रसरण दोनों ही λ के बराबर होते हैं। इस बंटन का यह एक महत्वपूर्ण गुणधर्म है।

टिप्पणी : प्वासों बंटन के माध्य तथा प्रसरण द्विपद बंटन के माध्य तथा प्रसरण से, वह सीमांत स्थिति लेते हुए जब $n \to \infty$ है, भी निकाले जा सकते हैं। इस प्रकार क्योंकि द्विपद बंटन का माध्य np है, इसलिए प्वासों बंटन का माध्य $= \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,(np) = \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\,(\lambda) = \lambda$ है। (क्योंकि λ एक स्थिरांक है।)

पुनः क्योंकि द्विपद बंटन का प्रसरण $npq = np(1-p)$ है,

इसलिए, प्वासों बंटन का प्रसरण

$$= \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; np\,(1-p)$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{सीमा}}\; \lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \qquad (\text{क्योंकि } np=\lambda \text{ है})$$

$$= \lambda \qquad \left(\text{क्योंकि जब } n\to\infty,\ \text{तब } \frac{\lambda}{n}\to 0\right)$$

9.10 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : एक व्यस्त यातायात चौराहे पर, किसी एक कार की दुर्घटना होने की प्रायिकता p बहुत कम, माना 0.0001, है। फिर भी दिन के किसी विशेष अन्तराल में, इस चौराहे से बहुत सी कारें, माना 1000, गुजरती हैं। इन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत, उस अन्तराल में दो या अधिक दुर्घटनाएँ होने की प्रायिकता क्या है ? $\left(e^{-0.1}=0.9048 \text{ का प्रयोग कीजिए}\right)$

हल : यहाँ $n=1000$ तथा $p=0.0001$ है। क्योंकि n बहुत बड़ा तथा p बहुत छोटा है, अतः हम वाँछित प्रायिकता परिकलित करने के लिए प्वासों बंटन का प्रयोग कर सकते हैं। माना यादृच्छिक चर X, दुर्घटनाओं की संख्या व्यक्त करता है।

अब, $\quad P(X \geqslant 2) = 1-[P(X=0)+P(X=1)]$

अब, $\quad P(X=0) = e^{-\lambda}$

परन्तु, $\lambda = np = 1000 \times 0.0001 = 0.1$

इसलिए, $P(X=0) = e^{-0.1}$

तथा, $P(X=1) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} = 0.1 \times e^{-0.1}$

इस प्रकार, $P(X \geqslant 2) = 1 - \left[e^{-0.1} + 0.1 \times e^{-0.1} \right] = 1 - e^{-0.1} \times 1.1$

$= 1 - 0.9048 \times 1.1$

$= 0.0047$

उदाहरण 2 : मान लीजिए कि किसी एक वर्ष में एक खान दुर्घटना में किसी विशेष कोयला खनक की मृत्यु होने की प्रायिकता 1/1400 है। प्वासों बंटन का प्रयोग करके इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक खान में, जिसमें 350 खनक कर्मचारी काम करते हैं, एक वर्ष में कम से कम एक घातक दुर्घटना होगी। ($e^{-0.25} = 0.78$ का प्रयोग कीजिए)

हल : यहाँ $p = \frac{1}{1400}$ तथा $n = 350$ है।

इसलिए, $\lambda = \frac{350}{1400} = 0.25$

इसलिए, $P(r) = \frac{(0.25)^r \, e^{-0.25}}{r!}$

तथा, $P(0) = e^{-0.25} = 0.78$

अब, P (कम से कम एक घातक दुर्घटना)

= 1 − P (कोई घातक दुर्घटना नहीं)

$= 1 - P(0) = 1 - 0.78 = 0.22$

प्रश्नावली 9.2

1. पासों का एक युग्म 200 बार फेंका जाता है। यदि योग 9 प्राप्त होने को सफलता माना जाए, तो सफलताओं की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।

2. एक टेलीफोन एक्सचेंज में 50 टेलीफोन लाइनें हैं। उनमें से किसी एक के व्यस्त होने की प्रायिकता 0.1 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि सभी लाइनें व्यस्त हों?

3. एक डिब्बे में 200 टिकट हैं तथा प्रत्येक पर संख्याओं 1 से 200 तक में से कोई एक संख्या अंकित है। डिब्बे में से प्रतिस्थापित करते हुए एक-एक करके 20 टिकट निकाले जाते हैं। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अधिक से अधिक 4 टिकटों पर अंकित संख्याएँ 20 से विभाज्य होंगी।

4. यदि प्वासों बंटन का प्रसरण 2 हो, तो प्वासों बंटन के पुनरावृत्ति सूत्र से $r=1, 2, 3, 4$ तथा 5 के लिए वह बंटन ज्ञात कीजिए। $\left(e^{-2}=0.1353\right.$ का प्रयोग कीजिए $\left.\right)$

5. 35 वर्ष की आयु के एक व्यक्ति की 40 वर्ष की आयु तक पहुँचने से पहले मृत्यु होने की प्रायिकता 0.018 ली जा सकती है। 400 व्यक्तियों, जिनकी वर्तमान आयु 35 वर्ष है, के एक समूह में इसकी लगभग प्रायिकता क्या है कि अगले 5 वर्षों में 2 व्यक्तियों की मृत्यु हो जाएगी ? $\left(e^{-7.2}=0.000747\right.$ का प्रयोग कीजिए $\left.\right)$

6. मान लीजिए कि एक विशेष मशीन द्वारा उत्पादित किसी वस्तु के खराब होने की प्रायिकता 0.2 है। यदि इस मशीन द्वारा उत्पादित ऐसी 10 वस्तुओं को यादृच्छिक रूप से चुना जाए, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि एक से अधिक वस्तुएँ खराब प्राप्त नहीं होंगी ? द्विपद और प्वासों बंटनों का प्रयोग कीजिए और दोनों परिणामों की तुलना कीजिए। $\left(e^{-2}=0.1353\right.$ का प्रयोग कीजिए $\left.\right)$

7. एक बीमा कम्पनी यह पता लगाती है कि एक विशेष प्रकार की दुर्घटना में प्रति वर्ष 0.1 प्रतिशत जनसंख्या ही ग्रस्त होती है। यदि इस जनसंख्या से उसके 10000 पालिसी धारकों (policy holders) को यादृच्छिक रूप से चुना गया हो, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि उसके 5 से अधिक पालिसी धारक ऐसी दुर्घटना से अगले वर्ष ग्रस्त नहीं होंगे ?

8. मान लीजिए कि 585 पृष्ठों वाली एक पुस्तक में टाइप सम्बन्धी 43 गलतियाँ हैं। यदि इन गलतियों को पूरी पुस्तक में यादृच्छिक रूप से वितरित कर दिया जाए, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि यादृच्छिक रूप से चुने गए 10 पृष्ठ गलतियों से रहित होंगे ? $\left(e^{-0.735}=0.4795\right.$ का प्रयोग कीजिए $\left.\right)$

9. मान लीजिए कि एक हवाई जहाज से गिराए गए बम (bomb) के एक विशेष लक्ष्य (target) से टकराने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। यदि 6 बम गिराए जाते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि

   (*i*) केवल 2 बम ही लक्ष्य से टकरायेंगे।

   (*ii*) कम से कम 2 बम लक्ष्य से टकरायेंगे।

   $\left(e^{-1.2}=0.3012\right.$ का प्रयोग कीजिए $\left.\right)$

10. एक पेंच (screws) निर्माता यह जानता है कि उसके उत्पादन का 4% खराब है। वह इन पेंचों को सौ-सौ के डिब्बों में बेचता है तथा यह गारंटी देता है कि एक डिब्बे में 5 से अधिक पेंच खराब नहीं होंगे। इसकी लगभग क्या प्रायिकता है कि एक डिब्बे में गारंटी के अनुसार माल नहीं निकलेगा ?

एकक X

प्रसामान्य प्रायिकता बंटन

10.1 भूमिका

पिछले एकक में, हमने अति महत्वपूर्ण असंतत बंटनों, अर्थात् द्विपद बंटन तथा प्वासों बंटन, का अध्ययन किया था। एक **असंतत यादृच्छिक चर (discrete random variable)** वह चर होता है जो केवल वियुक्त मान (isolated values), जो प्राय: धनात्मक पूर्णांकीय (positive integral) मान होते हैं, ही ले सकता है। एक सिक्के को, मान लीजिए 20 बार, उछालने पर प्राप्त Heads की संख्या एक असंतत यादृच्छिक चर है, क्योंकि यह 0, 1, 2, ..., 20 के अतिरिक्त कोई अन्य मान नहीं ले सकता है। वह प्रायिकता बंटन जिसमें इस प्रकार का चर हो, **असंतत प्रायिकता बंटन (discrete probability distribution)** कहलाता है। द्विपद तथा प्वासों बंटन, जिनका अध्ययन हमने पिछले एकक में किया है, असंतत प्रायिकता बंटनों के उदाहरण हैं।

असंतत चर के विपरीत, यदि एक चर संतत पैमाने (continuous scale) के सभी मान ग्रहण कर सकता हो, तो हम कहते हैं कि वह चर संतत (continuous) है। समय, लम्बाई और तापमान जैसी राशियाँ संतत पैमानों पर मापी जाती हैं। संतत चरों के कुछ उदाहरण निम्न हैं :

(i) व्यक्तियों के भार,

(ii) एक विशेष प्रकार की बनी विभिन्न कारों द्वारा पैट्रोल (petrol) की किसी निश्चित मात्रा में चली गई दूरियाँ,

(iii) व्यक्तियों के दाँये पैरों की लम्बाइयाँ।

संतत यादृच्छिक चर के प्रायिकता बंटन को **संतत प्रायिकता बंटन (continuous probability *distribution*)** कहते हैं।

इस एकक में एक महत्वपूर्ण संतत बंटन, जिसे **प्रसामान्य प्रायिकता बंटन (normal probability distribution)** या केवल **प्रसामान्य बंटन (normal distribution)** कहते हैं, का वर्णन किया गया है।

10.2 प्रसामान्य बंटन

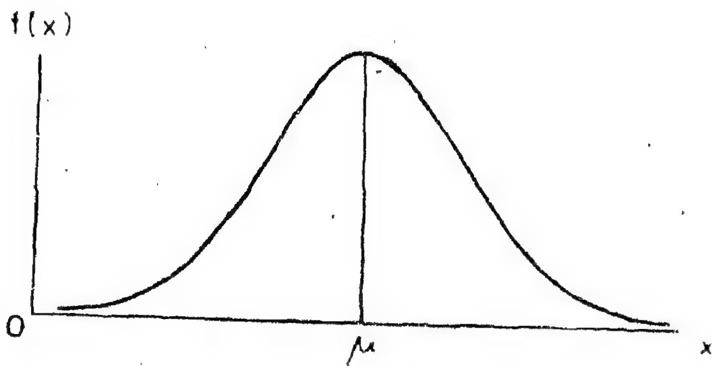
प्रसामान्य बंटन की व्यापक समीकरण

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (1)$$

द्वारा दी जाती है, जहाँ चर x, $-\infty$ से $+\infty$ तक कोई भी मान ले सकता है। यहाँ μ तथा σ, जिन्हें बंटन के प्राचल कहते हैं, प्रसामान्य बंटन के क्रमशः माध्य तथा मानक विचलन (standard deviation) हैं। μ तथा σ को प्रतिबंधों $-\infty<\mu<\infty, \sigma>0$ को अवश्य ही संतुष्ट करना चाहिए। फलन $f(x)$, प्रसामान्य बंटन का **प्रायिकता घनत्व फलन (probability density function)** कहलाता है तथा x, **प्रसामान्य चर (normal variable)** कहलाता है। समीकरण (1) द्वारा दिये गए प्रायिकता बंटन को कभी-कभी संक्षेप में इस प्रकार भी व्यक्त किया जाता है : "प्रसामान्य चर x का एक बंटन $N(\mu, \sigma^2)$ है" तथा इसे $x : N(\mu, \sigma^2)$ के रूप में लिखते हैं।

प्रसामान्य बंटन सबसे अधिक उपयोग में आने वाला संतत बंटन है। यह बंटन ऐसे बहुत से बंटनों के लिए एक सुन्दर सन्निकटन का काम करता है जिनका व्यावहारिक दृष्टि से बहुत महत्व है। साथ ही, इस बंटन के कई बहुत वाँछनीय गणितीय गुणधर्म हैं जिनसे बहुत से सैद्धान्तिक (theoretical) परिणाम ज्ञात करना सम्भव हो जाता है। प्रसामान्य बंटन के अति महत्त्वपूर्ण होने का एक कारण यह भी है कि बहुत सी प्राकृतिक परिघटनाएँ (phenomena) प्रसामान्यतः या लगभग ऐसी ही बँटी होती हैं। परिघटनाएँ, जैसे व्यक्तियों की लम्बाइयाँ तथा उनके भार, आई० क्यू० (I. Q.) की मापें, धातु (metal) की छड़ों की अधिक सही मापें लेने में त्रुटियाँ तथा विभिन्न परीक्षाओं में प्राप्तांक, आदि सभी के प्रसामान्य बंटन होते हैं।

समीकरण (1) द्वारा दिये गए फलन का आलेख **प्रसामान्य प्रायिकता वक्र (normal probability curve)** कहलाता है तथा इसे नीचे दिखाया गया है (देखिये आकृति 10.1)।



आकृति 10.1 : प्रसामान्य प्रायिकता वक्र

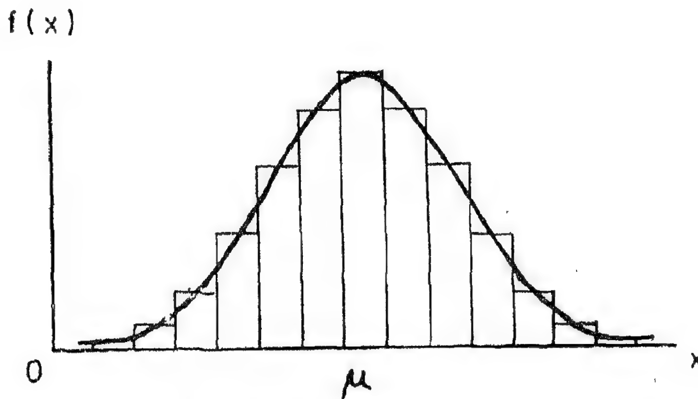
आलेख से हम देखते हैं कि यह घंटी के आकार (bell-shaped) का है तथा माध्य μ के सापेक्ष सममित है। वक्र के दोनों सिरे x-अक्ष की धनात्मक तथा ऋणात्मक दिशाओं की ओर क्रमशः $+\infty$ तथा $-\infty$ तक विस्तृत होते हैं तथा धीरे-धीरे x-अक्ष की ओर अग्रसर होते हैं, परन्तु उससे कभी मिलते नहीं हैं।

समीकरण (1) द्वारा दिए गए फलन का उच्चिष्ठ (maximum) मान $x=\mu$ पर है, क्योंकि $x=\mu$ पर इसके घातांकीय भाग (exponential part) का महत्तम मान है। जिसका अर्थ यह है कि

वक्र एकबहुलकी (unimodal) है तथा प्रसामान्य बंटन का बहुलक (mode) उसके माध्य से $x=\mu$ पर संपाती है।

रेखा $x=\mu$, प्रसामान्य प्रायिकता वक्र के अन्तर्गत x-अक्ष के ऊपर के क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में बांटती है। इसका अर्थ यह हुआ कि बंटन का माध्यक (median) भी उसके माध्य तथा बहुलक से संपाती है।

प्रसामान्य बंटन को द्विपद बंटन की उस सीमांत स्थिति से प्राप्त किया जा सकता है जब प्रयत्नों की संख्या n बहुत बड़ी हो तथा सफलता की प्रायिकता p, $\frac{1}{2}$ के बहुत निकट हो। इस परिणाम को गणितीय रूप से सिद्ध करना इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। प्रसामान्य वक्र को, द्विपद बंटन के आयतचित्र की एक सीमांत स्थिति के रूप में सोचा जा सकता है, जब $n\to\infty$ और p, $\frac{1}{2}$ के बहुत निकट है। इन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत, द्विपद बंटन का आयतचित्र, **प्रसामान्य प्रायिकता वक्र** की ओर अग्रसर होगा जैसा कि आकृति 10.2 में दिखाया गया है।



आकृति 10.2 : द्विपद बंटन के आयतचित्र की सीमांत स्थिति के रूप में प्रसामान्य प्रायिकता वक्र

हम मुख्यत: प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत किन्हीं दो कोटियों (ordinates) के बीच के क्षेत्रफलों को जानने के ही इच्छुक हैं, क्योंकि वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल, दिए हुए अन्तरालों (intervals) में आने वाले मानों की प्रायिकताएँ निरूपित करते हैं। पाठकों को याद होगा कि एकक IX में द्विपद बंटन के आयतचित्र में आयतों के क्षेत्रफल चर के विभिन्न मानों के लिए उनकी प्रायिकताएँ निरूपित करते थे, जबकि प्रत्येक आयत की चौड़ाई मात्रक लम्बाई की थी।

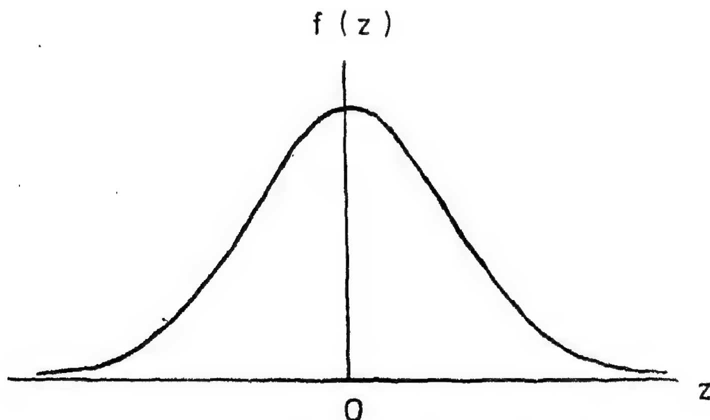
10.3 प्रसामान्य बंटन का मानक रूप

एक यादृच्छिक चर X **मानकीकृत (standardized)** किया हुआ तब कहा जाता है जब इसे इस तरह से व्यवस्थित कर लिया जाए कि इसका माध्य 0 हो तथा मानक विचलन 1 हो। माध्य 0 तथा मानक विचलन 1 वाले प्रसामान्य बंटन को **मानक रूप में प्रसामान्य बंटन (normal distribution in standard form)** या **मानक प्रसामान्य बंटन (standard normal distribution)** कहते हैं।

गणितीय साँख्यिकी की अति महत्त्वपूर्ण प्रमेयों में से एक यह है कि **यदि X एक प्रसामान्य यादृच्छिक चर है जिसका माध्य μ तथा मानक विचलन σ है, तो यादृच्छिक चर $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ का प्रसामान्य बंटन होता है जिसका माध्य 0 तथा मानक विचलन 1 है। यादृच्छिक चर Z, मानकीकृत (या मानक) प्रसामान्य यादृच्छिक चर** कहलाता है। इस प्रमेय की उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। इस प्रकार, मानक रूप में प्रसामान्य बंटन के लिए प्रायिकता घनत्व फलन को निम्न प्रकार दिया जाता है :

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2},\ (-\infty<z<\infty) \tag{2}$$

उपर्युक्त फलन का लाभ यह है कि इसमें कोई प्राचल नहीं है। इससे हम, मानक सारणियों (standard tables) का प्रयोग करके, प्रसामान्य प्रायिकता वक्र के अन्तर्गत विभिन्न क्षेत्रफल परिकलित कर सकते हैं। उपर्युक्त फलन का आलेख नीचे दिखाया गया है (देखिए आकृति 10.3)।



आकृति 10.3 : मानक प्रसामान्य प्रायिकता वक्र

पाठक यह देख सकते हैं कि आलेख का आकार, आकृति 10.1 में दिए गए प्रसामान्य वक्र के आकार के प्रकार का ही है। अन्तर केवल यह है कि अब मूलबिंदु को माध्य वाले बिन्दु पर पहुँचा दिया गया है।

10.4 अनन्त समाकल पर एक टिप्पणी

यदि किसी समाकल में, या तो समाकल की उच्च सीमा और निम्न सीमा का अन्तर अनन्त हो या समाकल की निम्न और उच्च सीमाओं के बीच स्थित एक या अधिक बिन्दुओं (सीमाओं को सम्मिलित करते हुए) पर समाकल्य (integrand) अनन्त की ओर अग्रसर हो, तो समाकल को प्रायः एक **अनन्त समाकल (infinite integral)** कहते हैं। [कुछ लेखक इसे **अनुचित समाकल (improper integral)** कहते हैं।]

उदाहरणार्थ, $\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$,

इत्यादि सभी अनन्त समाकल हैं ।

आगे आने वाले अनुच्छेदों में हमें $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ के प्रकार के समाकल मिलेंगे । इस प्रकार के समाकलों के मान निकालने की विधियों की व्याख्या हमारी इस पुस्तक की सीमा के बाहर है । हम यहाँ केवल इतना कहेंगे कि एक अनन्त समाकल का अस्तित्व हो भी सकता है तथा नहीं भी हो सकता है । साथ ही, एक अनन्त समाकल को परिमित (finite) संख्या के समाकलों के योग के रूप में विभक्त किया जा सकता है, जैसा नीचे दिखाया गया है :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots$$

$$+ \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx + \int_{a_n}^{\infty} f(x)dx,$$

जहाँ $-\infty < a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n < \infty$ है ।

10.5 मानक प्रसामान्य प्रायिकता वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल

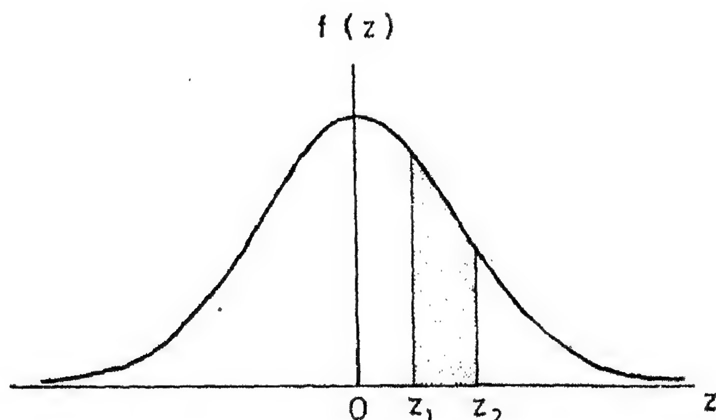
हम देख चुके हैं कि मानक रूप में प्रसामान्य घनत्व फलन द्वारा निरूपित प्रायिकता वक्र एक घंटी के आकार की होती है जो आधार रेखा की धनात्मक दिशा की ओर $+\infty$ तक तथा ऋणात्मक दिशा की ओर $-\infty$ तक विस्तृत होती है । साथ ही, यह वक्र माध्य 0 के सापेक्ष सममित होती है ।

हम जानते हैं कि वक्र $y=f(x)$, x-अक्ष तथा दो कोटियों $x=a$ तथा $x=b$ द्वारा परिसीमित क्षेत्र का क्षेत्रफल, समाकल $\int_{a}^{b} f(x)dx$ द्वारा प्राप्त होता है (इस शृंखला की पुस्तक IV का अनुच्छेद 29.6 देखिए) । मानक रूप में प्रसामान्य बंटन के लिए हमें निम्न प्राप्त है :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

यदि हम इस फलन को माना z_1 तथा z_2 के बीच समाकलित करें, तो समाकल

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$; वक्र, z-अक्ष तथा रेखाओं $z=z_1$ और $z=z_2$ द्वारा परिसीमित क्षेत्र के क्षेत्रफल को निरूपित करेगा।



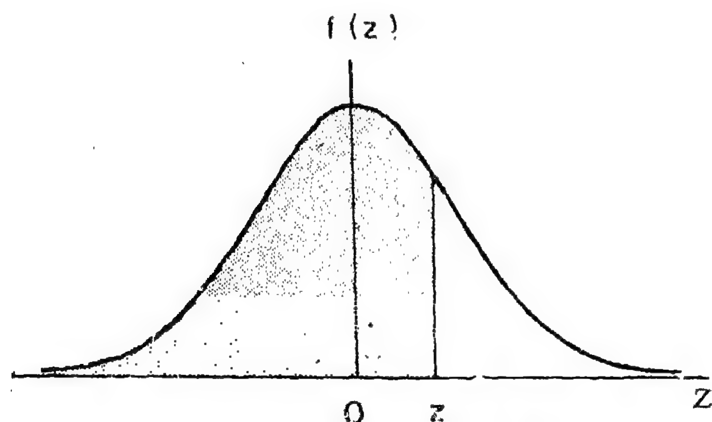
आकृति 10.4 : $z=z_1$ तथा $z=z_2$ के बीच का क्षेत्रफल

आकृति 10.4 में दिखाया गया छायामय क्षेत्र (shaded region) इस क्षेत्रफल को निरूपित करता है।

इसी प्रकार, समाकल

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (3)$$

आकृति 10.5 के छायामय क्षेत्र के क्षेत्रफल को निरूपित करता है।



आकृति 10.5 : $-\infty$ से z तक का क्षेत्रफल

क्योंकि प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल, प्रायिकता निरूपित करता है, इसलिए समीकरण (3) द्वारा परिभाषित फलन $F(z)$ भी प्रायिकता निरूपित करेगा, जबकि चर $-\infty$ से z तक विचरण करता (varies) है। समीकरण (3) में $z=1$ रखने पर, हमें

$$F(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

प्राप्त होता है, जो $z\leqslant 1$ के लिए प्रायिकता निरूपित करता है तथा इसे $P(Z\leqslant 1)$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। व्यापक रूप में, यदि $f(z)$ प्रसामान्य बंटन का प्रायिकता घनत्व फलन है, तो

$$P(z_1\leqslant Z\leqslant z_2)^*=\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \qquad (4)$$

तथा,
$$F(z)=\int_{-\infty}^{z} f(z)dz \qquad (5)$$
$$=P(Z\leqslant z)$$

समीकरण (5) द्वारा परिभाषित फलन $F(z)$, प्रसामान्य बंटन के लिए, **बंटन फलन (distribution function)** कहलाता है।

10.6 प्रसामान्य बंटन के कुछ गुणधर्म

प्रसामान्य बंटन के कुछ गुणधर्म निम्नलिखित हैं :

(i) समीकरण (1) द्वारा दिया गया प्रायिकता घनत्व फलन $f(x)$, शून्य के बराबर या उससे अधिक होता है। (वास्तव में, यह गुणधर्म सभी संतत प्रायिकता बंटनों के लिए सत्य है।)

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ है। इसका अर्थ यह है कि प्रसामान्य प्रायिकता वक्र के अन्तर्गत x-अक्ष के ऊपर का सम्पूर्ण क्षेत्रफल 1 के बराबर है। यह इस तथ्य से भी स्पष्ट है कि उपर्युक्त सम्पूर्ण क्षेत्रफल, सभी प्रायिकताओं के योग को निरूपित करता है जिसे किसी भी प्रायिकता बंटन के लिए 1 के बराबर अवश्य होना चाहिए।

(ii) की गणितीय उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

(iii) प्रसामान्य बंटन अपने माध्य के सापेक्ष सममित होता है।

(iv) इस बंटन के माध्य, बहुलक तथा माध्यक संपाती होते हैं।

टिप्पणी : प्रसामान्य बंटन के कुछ और भी गुणधर्म हैं जिनका वर्णन हमारी इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

---

*प्रायिकताओं $P(z_1\leqslant Z\leqslant z_2)$, $P(z_1\leqslant Z< z_2)$, $P(z_1< Z\leqslant z_2)$ तथा $P(z_1< Z< z_2)$ को समान माना जाना है। इसी प्रकार, $P(Z\leqslant z)$ तथा $P(Z< z)$ भी समान प्रायिकताएँ हैं।

10.7 प्रसामान्य प्रायिकता वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफलों को ज्ञात करने के लिए सारणी का उपयोग

हम देखते हैं कि समीकरण (5) द्वारा दिए गए समाकल का z के विभिन्न मानों के लिए मान ज्ञात करना बहुत जटिल होता है। साँख्यिकी की किसी भी मानक पुस्तक में, z के विभिन्न मानों के लिए क्षेत्रफलों $F(z)$ की एक मानक प्रसामान्य सारणी दी जाती है। हमने ऐसी एक सारणी परिशिष्ट (appendix) में दी है, आगे जो आ रहा है, उसमें हम यह मानेंगे कि $f(z)$ मानक प्रसामान्य घनत्व फलन है तथा $F(z)$ तदनुरूपी बंटन फलन है। हम देखते हैं कि

$$F(\infty)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=1 \qquad (6)$$

है, क्योंकि प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत संपूर्ण क्षेत्रफल 1 के बराबर होता है। साथ ही,

$$P(z_1 \leqslant Z \leqslant z_2)=F(z_2)-F(z_1) \qquad (7)$$

है, क्योंकि

$$P(z_1 \leqslant Z \leqslant z_2 = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz + \int_{-\infty}^{z_1} f(z)dz - \int_{-\infty}^{z_1} f(z)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{z_2} f(z)dz - \int_{-\infty}^{z_1} f(z)dz$$

$$=F(z_2)-F(z_1)$$

समीकरण (4) तथा (7) से यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$P(z_1 \leqslant Z \leqslant z_2)=F(z_2)-F(z_1)$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \qquad (8)$$

अब हम यह सिद्ध करेंगे कि

$$F(-z_1)=1-F(z_1) \qquad (9)$$

इसे सिद्ध करने के लिए, हम देखते हैं कि

$$F(-z_1)= \int_{-\infty}^{-z_1} f(t)dt= -\int_{+\infty}^{z_1} f(u)du,$$

जहाँ $t=-u$ है, क्योंकि $f(-u)=f(u)$

अब, $F(-z_1)+F(z_1) = -\int_{\infty}^{z_1} f(u)du + \int_{-\infty}^{z_1} f(u)du$

$$= \int_{z_1}^{\infty} f(u)du + \int_{-\infty}^{z_1} f(u)du$$

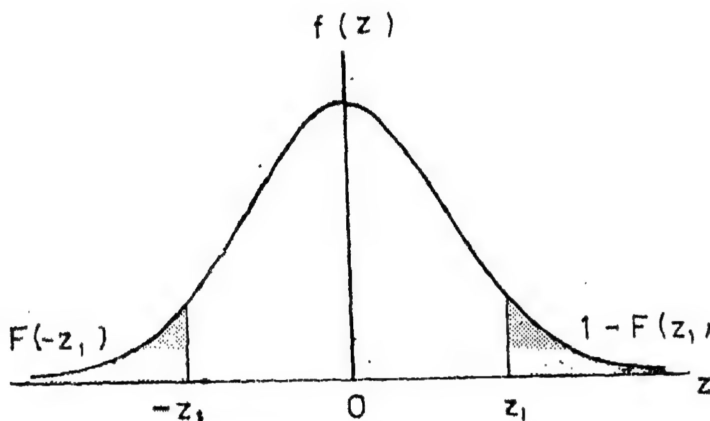
$$= \int_{-\infty}^{z_1} f(u)du + \int_{z_1}^{\infty} f(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du$$

$$= 1$$

अतः, $F(-z_1) = 1 - F(z_1)$

यह निष्कर्ष इस तथ्य से भी तुरन्त निकल आता है कि मानक प्रसामान्य वक्र माध्य के सापेक्ष सममित होती है तथा इस वक्र के अन्तर्गत सम्पूर्ण क्षेत्रफल एक के बराबर होता है (देखिए आकृति 10.6)।



आकृति 10.6 : $F(-z_1) = 1 - F(z_1)$

टिप्पणी : यद्यपि सारणी से हमें केवल मानक प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल ही प्राप्त होते हैं, फिर भी हम किसी भी प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफलों को भी निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :

माना चर X प्रसामान्यतः वितरित है और उसका माध्य 100 तथा मानक विचलन 10 है। तब मानक प्रसामान्य यादृच्छिक चर Z निम्न है :

$$Z = \frac{X-100}{10} \qquad \textbf{(A)}$$

यदि हम, माना, $P(X \leqslant 110)$ ज्ञात करना चाहते हैं, तो (A) से हम $X=110$ के लिए $Z=1$ प्राप्त करते हैं।

अतः, $P(X \leqslant 110)=P(Z \leqslant 1)=F(1)$
तथा परिशिष्ट में दी गई सारणी से हम

$$F(1)=0.8413$$

प्राप्त करते हैं, जो $Z \leqslant 1$ या $X \leqslant 110$ की प्रायिकता निरूपित करता है। प्रतिशत के पदों में हम कहते हैं कि लगभग 84% समंक (scores) 110 या उससे कम हैं।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे।

10.8 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : माना X, किसी परीक्षा के प्राप्तांकों को व्यक्त करता है। यदि X, प्रसामान्यतः वितरित है और उसका माध्य 100 तथा मानक विचलन 15 है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि X; 130 से अधिक नहीं है।

हल : आइये हम पहले सूत्र $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ की सहायता से X को मानक प्रसामान्य चर Z में परिवर्तित करें। इस प्रकार, हम

$$Z=\frac{X-100}{15} \qquad (A)$$

प्राप्त करते हैं। इसकी वाँछित प्रायिकता कि X, 130 से अधिक नहीं है, $P(X \leqslant 130)$ से व्यक्त की जा सकती है। जब $X=130$ है, तब (A) से हमें

$$Z=\frac{130-100}{15}=2$$

प्राप्त होता है। हमें $P(Z \leqslant 2)=F(2)$ ज्ञात करना है।

सारणी 1 से हम $F(2)=0.9772$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए, $P(X \leqslant 130)=0.9772$

उदाहरण 2 : एक कक्षा के विद्यार्थियों की एक यांत्रिकीय अभिक्षमता परीक्षा (mechanical aptitude test) ली गई। उनके प्राप्तांकों को प्रसामान्यतः वितरित पाया गया और उनका माध्य 60 तथा मानक विचलन 5 था। कितने प्रतिशत विद्यार्थियों ने

(i) 60 अंकों से अधिक
(ii) 56 अंकों से कम
(iii) 45 तथा 65 अंकों के बीच

अंक प्राप्त किए ?

हल : (i) हम जानते हैं कि $Z=\dfrac{X-60}{5}$ है। $X=60$ के लिए, $Z=0$ है। हमें $P(X>60)$, अर्थात्, $P(Z>0)$ ज्ञात करना है।

परन्तु, $P(0<Z<\infty)=F(\infty)-F(0)=1-0.5=0.5$

इस प्रकार, 50% विद्यार्थियों ने 60 से अधिक अंक प्राप्त किए।

(ii) X=56 के लिए, $Z=\frac{56-60}{5}=-0.8$ है।

इसलिए, F(—0.8)=1—F(0.8)=1—0.788=0.212

इस प्रकार, 21.2% विद्यार्थियों ने 56 से कम अंक प्राप्त किए।

(iii) X=45 के लिए, $Z=\frac{45-60}{5}=-3.0$ तथा

X=65 के लिए, $Z=\frac{65-60}{5}=1.0$ है।

इसलिए, $P(-3.0 \leq Z \leq 1.0) = F(1.0) - F(-3.0)$

$= F(1.0) - \{1 - F(3.0)\}$

$= 0.841 - (1 - 0.999) = 0.84$

इस प्रकार, 84% विद्यार्थियों ने 45 तथा 65 के बीच अंक प्राप्त किये।

प्रश्नावली 10.1

1. एक परीक्षा में विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा प्राप्त अंक प्रसामान्यतः वितरित थे और उनका माध्य 80 तथा मानक विचलन 6 था।

(*i*) 90 अंक (*ii*) 68 अंक

(*iii*) 57 अंक (*iv*) 102 अंक

प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों के मानक अंक ज्ञात कीजिए।

2. मानक प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत वह क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो

(*i*) $z=2.70$ के दाईं ओर

(*ii*) $z=1.73$ के बाईं ओर

(*iii*) $z=-0.66$ के दाईं ओर

(*iv*) $z=-1.88$ के बाईं ओर

(*v*) $z=1.25$ तथा $z=1.67$ के बीच

(*vi*) $z=-0.90$ तथा $z=-1.85$ के बीच

(*vii*) $z=-1.45$ तथा $z=1.45$ के बीच

(*viii*) $z=-0.90$ तथा $z=1.58$ के बीच

स्थित है।

3. एक प्रसामान्य वक्र, जिसका $\mu=25.3$ तथा $\sigma=8.1$ है, दी हुई है। वक्र के अन्तर्गत 20.6 तथा 29.1 के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. पिछले अनुभवों से यह ज्ञात है कि अपराह्न 3 बजे से 4 बजे के बीच किसी विशेष समुदाय क्षेत्र में प्रत्येक दिन की गई टेलीफोन कॉलों (telephone calls) की संख्या का माध्य 352 तथा मानक विचलन 31 है। उस समुदाय (community) क्षेत्र में अपराह्न 3 बजे तथा अपराह्न 4 बजे के बीच कितने प्रतिशत समय में 400 से अधिक टेलीफोन कॉल होंगी ?

5. किसी विशेष प्रकार के इलैक्ट्रॉनिक यन्त्रों (electronic devices) के जीवन-समय का माध्य 300 घण्टे तथा मानक विचलन 25 घण्टे है। यह मानते हुए कि इन जीवन-समयों, जो निकटतम घण्टे तक मापे गए हैं, के बंटन को एक प्रसामान्य वक्र के साथ निकटतम रूप से सन्निकटित किया जा सकता है,

   (*i*) इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इन इलैक्ट्रॉनिक यन्त्रों में से किसी एक का जीवन-समय 350 घण्टों से अधिक है।

   (*ii*) यह ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत का जीवन-समय 300 घण्टे या उससे कम होगा।

   (*iii*) यह ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत का जीवन-समय 220 घण्टों तथा 260 घण्टों के बीच होगा।

6. साँख्यिकी की एक अन्तिम परीक्षा में विद्यार्थियों के एक बड़े समूह द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य 58 तथा मानक विचलन 8.5 है। यह मानते हुए कि ये अंक लगभग प्रसामान्यत: वितरित हैं, बताइए कि यह आशा कितने प्रतिशत विद्यार्थियों से की जा सकती है कि उनको 60 और 69 के बीच (ये दोनों भी सम्मिलित हैं) अंक प्राप्त होंगे।

महसम्बन्ध

एकक XI

सहसम्बन्ध

11.1 भूमिका

अभी तक सांख्यिकी के अध्ययन में हमने केवल एक चर* से सम्बन्धित आँकड़ों की व्याख्या करना ही सीखा है। ये किन्हीं व्यक्तियों के किसी परीक्षा में प्राप्तांक, किसी कारखाने के श्रमिकों की मजदूरी हो सकते हैं, या ये किसी प्रसूतिगृह में किसी एक विशेष महीने में जन्मे नवजात शिशुओं के भार हो सकते हैं, इत्यादि। पाठक को याद होगा कि आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए हमने अवस्थिति (location) और परिक्षेपण (dispersion) के विभिन्न अंकगणितीय निरूपकों (arithmetical descriptors) को ज्ञात करना सीखा था। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि अब तक हम केवल एक चर से सम्बद्ध समष्टियों (populations) अर्थात् आंकड़ों का ही अध्ययन करते रहे हैं।

परन्तु कभी-कभी दो या अधिक चरों के अलग-अलग प्रभाव जानने की अपेक्षा इनमें एक साथ होने वाले परिवर्तनों (variations) की जाँच करना अधिक सुसंगत (relevant) होता है। क्या यह सत्य है कि जिस वर्ष में सामान्य से अधिक वर्षा होती है उस वर्ष में छातों तथा बरसातियों (raincoats) की बिक्री भी अधिक होती है या यह कि वस्तुओं के कम मात्रा में आने पर उनकी कीमतें बढ़ जाती हैं? इस प्रकार की समस्याएँ तथा और भी ऐसी बहुत सी समस्याएँ जिनमें दो चरों के पारस्परिक परिवर्तन अर्थात् प्रसरण का प्रभाव सम्बद्ध होता है "सहसम्बन्ध" (**correlation**) के क्षेत्र के अन्तर्गत आती हैं।

शब्द "सहसम्बन्ध" का एक परिशुद्ध अर्थ देने का प्रयत्न करने से पहले, हम इस पर बल देना चाहेंगे कि जब हम दो चरों [माना, स्कूल के कुछ विद्यार्थियों की लम्बाइयाँ तथा भार, कारखाने के श्रमिकों के एक समूह की आई० क्यू० (I. Q.) तथा उनकी आमदनी, कालेज के विद्यार्थियों के एक समूह की आयु तथा उनके द्वारा किसी उपलब्धि परीक्षा (achievement test) में प्राप्त किए गए अंक, इत्यादि] में एक साथ हुए परिवर्तनों को देखते हैं तब विचाराधीन आंकड़ों में, जिन्हें **द्विचर आँकड़े (bivariate data)** भी कहते हैं, मापों के युग्म (pairs of measurements) सम्मिलित होंगे। इन आँकड़ों की एक मुख्य विशेषता यह है कि विचाराधीन समूह अथवा समष्टि के प्रत्येक सदस्य के लिए एक प्रेक्षण (observation) का दूसरे के साथ एक युग्म बनाया जा सकता है। इन प्रेक्षणों को हम **युग्मित प्रेक्षण (paired observations)** कहेंगे।

आइये अब शब्द सहसम्बन्ध के अर्थ की ओर ध्यान दें। यदि दो राशियाँ **इस प्रकार परिवर्तित होती हैं कि एक में परिवर्तन के साथ ही दूसरी में परिवर्तन होता है, तो ये राशियाँ सम्बन्धित या सहसम्बन्धित (correlated) कहलाती हैं**। हम कह सकते हैं कि सहसम्बन्ध इस बात की व्याख्या करने

---

*इन्हें कभी-कभी एकविचर आँकड़े (univariate data) कहते हैं।

से अपना सम्बन्ध रखता है कि दो चरों के बीच सम्बन्ध की मात्रा [या परिमाण] (degree) कितनी है, अर्थात् वे किस सीमा तक सम्बन्धित हैं।

11.2 युग्मित प्रेक्षणों के बीच सम्बन्धों के प्रकार

दो चरों (युग्मित प्रेक्षणों) के बीच कई प्रकार के सम्बन्ध हो सकते हैं। आइये नीचे इन पर विचार करें :

हम पहले उस स्थिति पर विचार करेंगे जब दो चर इस प्रकार परिवर्तित होते हैं कि उनका अनुपात सदैव स्थिर रहता है। उदाहरणार्थ, वृत्त की परिधि सदैव उसके व्यास तथा एक स्थिर संख्या के अनुपात के बराबर होती है (इस स्थिर संख्या को π कहते हैं)। जब तथा ज्यों ही व्यास में परिवर्तन होता है, परिधि में भी परिवर्तन होता है तथा परिधि में हुआ यह परिवर्तन, व्यास में हुए परिवर्तन और उसी स्थिर संख्या (π) के गुणनफल के बराबर होता है। ऐसी स्थितियों में सहसम्बन्ध को **परिपूर्ण (perfect)** कहते हैं।

यह परिपूर्ण सहसम्बन्ध फिर दो प्रकार का होता है :

(i) **परिपूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध**

(ii) **परिपूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध**

यदि एक चर के बढ़ने (या घटने) पर दूसरा चर भी समानुपाती रूप से बढ़ता (या घटता) हो, तो ऐसे सहसम्बन्ध को **परिपूर्ण** धनात्मक कहते हैं। वृत्त की परिधि तथा व्यास के बीच सहसम्बन्ध इसी प्रकार का है। दूसरी ओर, यदि एक चर के बढ़ने (या घटने) पर दूसरा चर समानुपाती रूप से घटता (या बढ़ता) हो, तो ऐसे सहसम्बन्ध को **परिपूर्ण ऋणात्मक** कहते हैं।

यदि दो चरों में कोई सहसम्बन्ध नहीं है, अर्थात् एक चर में परिवर्तन से दूसरे चर में कोई परिवर्तन नहीं होता है, तो हम कहते हैं कि विचाराधीन दोनों चर **असहसम्बन्धी (uncorrelated)** हैं।

परन्तु व्यापार, अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान, सामाजिक विज्ञान तथा जीव विज्ञान सम्बन्धी अन्वेषणों (enquiries) में परिपूर्ण सहसम्बन्ध की परिघटनाएँ बहुत कम ही देखने को मिलती हैं। बहुधा एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में भी परिवर्तन होता है, परन्तु वह सदैव एक ही अनुपात में नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में हम कहते हैं कि विचाराधीन दोनों राशियों में किसी न किसी मात्रा का सहसम्बन्ध है। पुनः दोनों चरों में विद्यमान सहसम्बन्ध को धनात्मक [सीधा (direct)] या **ऋणात्मक** [उल्टा (indirect)] तब कहते हैं जब एक चर के बढ़ने से दूसरा चर क्रमशः **बढ़ता या घटता है**।

11.3 प्रकीर्ण आरेख*

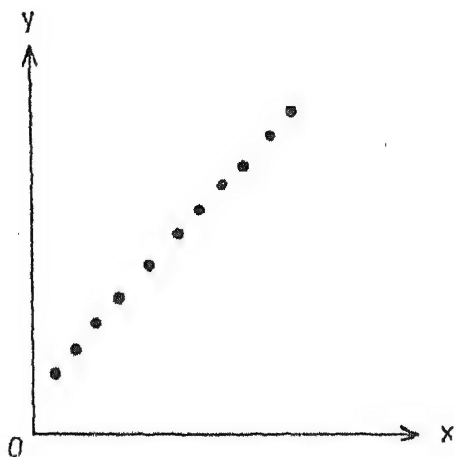
जैसा कि नाम से विदित है, प्रकीर्ण आरेख (scatter diagram) विचाराधीन चरों के विभिन्न मानों के बिखराव अर्थात् प्रकीर्ण (scatter) का एक आलेखीय निरूपण होता है। इसका प्रायः दो चरों के बीच विद्यमान सहसम्बन्ध के बारे में एक मोटे तौर पर अनुमान लगाने में लाभप्रद रूप से प्रयोग किया जाता है। इसके लिए हमें केवल यह करना होता है कि, समकोणिक निर्देशांक अक्षों का प्रयोग करते

---

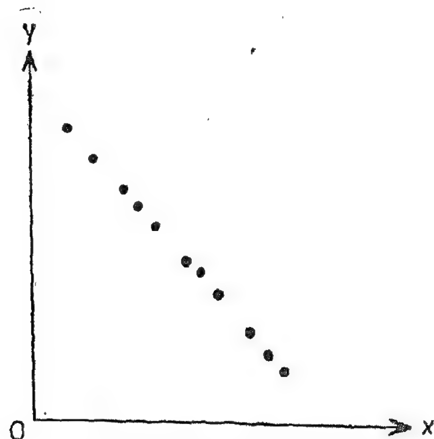
*कुछ लेखक **प्रकीर्ण आरेख को बिन्दु आरेख (dot diagram)** भी कहते हैं।

हुए, दोनों चरों के तदनुरूपी मानों को [क्रमित युग्मों (ordered pairs) के रूप में] आलेखित (plot) किया जाए तथा इन आलेखित बिन्दुओं की प्रवृत्ति (trend) देखी जाए।

यदि आलेखित बिन्दु एक रेखा पर स्थित हों, तो यह आरेख दो चरों के बीच एक परिपूर्ण सहसम्बन्ध (धनात्मक या ऋणात्मक) दर्शाता है [देखिए आकृति 11.1 (i) तथा 11.1 (ii)]। ध्यान



(i) परिपूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध



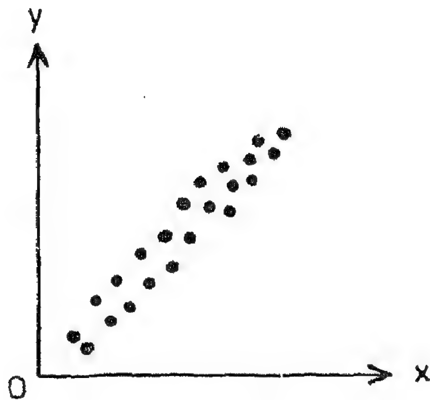
(ii) परिपूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध

आकृति 11.1 : परिपूर्ण सहसम्बन्ध के लिए प्रकीर्ण आरेख

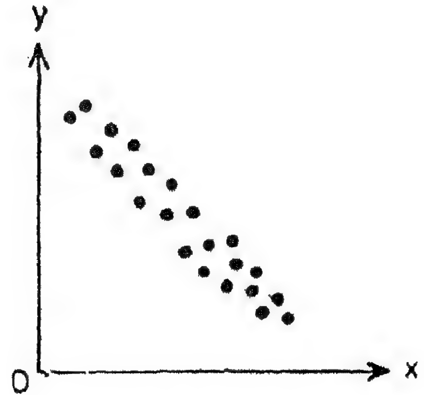
दीजिए कि आकृति 11.1 (i) में बिन्दु ऊपर की ओर जाने की प्रवृत्ति दर्शा रहे हैं। इसका अर्थ यह है कि एक चर में वृद्धि होने से दूसरे चर में भी वृद्धि होती है। इस प्रकार आकृति 11.1 (i) एक परिपूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध की स्थिति प्रदर्शित करती है।

आकृति 11.1 (ii) में, आलेखित बिन्दुओं की प्रवृत्ति नीचे की ओर जाने की है, जो यह दर्शाता है कि एक चर में वृद्धि होने से दूसरे चर में कमी होती है। इस प्रकार, आकृति 11.1 (ii) एक परिपूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध की स्थिति प्रदर्शित करती है।

जब आलेखित बिन्दु **एक रेखा पर स्थित नहीं हों,** परन्तु एक रेखा के चारों ओर (लगभग) बिखरे हुए दिखाई देते हों जैसा कि आकृतियों 11.2 [(i) तथा (ii)] में दिखाया गया है, तो चरों को **सहसम्बन्धित (correlated)** कहा जाता है। बिन्दुओं का बिखराव रेखा के चारों ओर जितना अधिक निकट होता है, चरों के बीच सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक होती है। आकृति 11.2 (i) अधिक मात्रा का एक धनात्मक सहसम्बन्ध दर्शाती है जबकि आकृति 11.2 (ii) अधिक मात्रा का एक ऋणात्मक सहसम्बन्ध दर्शाती है। इसी प्रकार आकृतियाँ *11.3 [(i) तथा (ii)]* विचाराधीन दोनों चरों के बीच कम मात्रा का सहसम्बन्ध दर्शाती हैं क्योंकि बिन्दु रेखा से बहुत दूर-दूर बिखरे हुए हैं। इसके विपरीत,

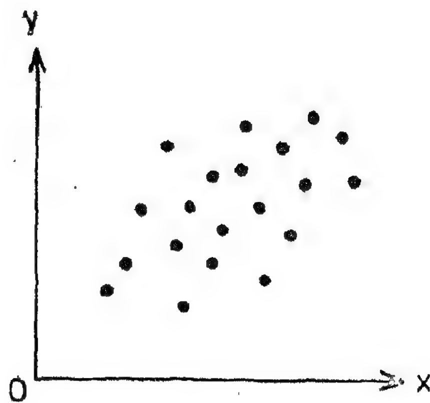


(i) अधिक मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध

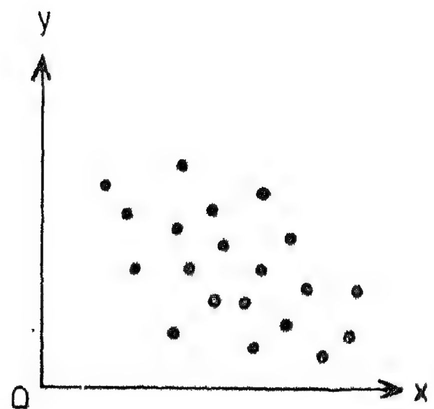


(ii) अधिक मात्रा का ऋणात्मक सहसम्बन्ध

आकृति 11.2 : अधिक मात्रा के सहसम्बन्ध के लिए प्रकीर्ण आरेख

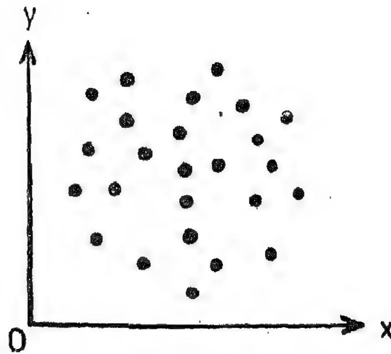


(i) कम मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध



(ii) कम मात्रा का ऋणात्मक सहसम्बन्ध

आकृति 11.3 : कम मात्रा के सहसम्बन्ध के लिए प्रकीर्ण आरेख



आकृति 11.4 : असहसम्बन्ध के लिए प्रकीर्ण आरेख

यदि आलेखित बिन्दु कोई भी प्रवृत्ति प्रदर्शित नहीं करते हैं, जैसा कि आकृति 11.4 में दिखाया गया है, तो हम कहते हैं कि विचाराधीन चर सहसम्बन्धित नहीं हैं, अर्थात् वे **असहसम्बन्धी (uncorrelated)** हैं।

11.4 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक

पिछले अनुच्छेद में हमने यह बताया था कि एक प्रकीर्ण आरेख से हमें केवल मोटे तौर पर यह अनुमान लग जाता है कि दो चर, माना x तथा y, किस प्रकार सम्बन्धित हैं। हम केवल प्रकीर्ण आरेख से आँकड़ों की जाँच करके कोई ठोस निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं। दूसरे शब्दों में, हम केवल प्रकीर्ण आरेख में यह देखकर कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि, क्योंकि आधे से अधिक बिन्दु लगभग एक रेखा पर स्थित प्रतीत हो रहे हैं, इसलिए चरों के बीच एक धनात्मक या ऋणात्मक सहसम्बन्ध है। दूसरी ओर, हम यह निष्कर्ष भी नहीं निकाल सकते हैं कि उनमें कोई सहसम्बन्ध नहीं है। हमें एक **राशि (quantity)** (जो एक संख्या द्वारा निरूपित हो) की आवश्यकता है, जो यह माप करती हो कि x तथा y किस सीमा तक सम्बन्धित हैं। इसके लिए प्रयोग की जाने वाली राशि को **सहसम्बन्ध गुणांक (co-efficient of correlation)** कहते हैं तथा इसे प्रायः r_{xy} द्वारा व्यक्त करते हैं। सहसम्बन्ध गुणांक r_{xy} दो चरों x तथा y के बीच सम्बन्ध की मात्रा (degree) की माप करता है तथा यह निम्न सूत्र से प्राप्त होता है :

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i-\bar{y})}{n\sigma_x\,\sigma_y} \quad (1)$$

जहाँ x_i तथा y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ क्रमशः x और y के मानों के दो समुच्चय हैं तथा $\bar{x}_i\, y$, σ_x, σ_y, क्रमशः तदनुरूपी माध्य तथा मानक विचलन हैं, जिससे

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\quad \sigma_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

तथा, $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

सहसम्बन्ध गुणांक की उपर्युक्त परिभाषा सन् 1890 में कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) द्वारा दी गई थी तथा उन्हीं के नाम पर यह **कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's correlation co-efficient)** कहलाता है। दो चरों के बीच इस सहसम्बन्ध गुणांक को परिभाषित करने का औचित्य निम्न प्रकार दिया जा सकता है :

हम जानते हैं कि व्यंजकों $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ तथा $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ से क्रमशः चरों x तथा y के प्रसरणों अर्थात् परिवर्तनों की मापें प्राप्त होती हैं। हमें स्पष्टतया यह आशा करनी चाहिए कि व्यंजक

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \qquad \text{(A)}$$

से हमें x तथा y में एक साथ हुए प्रसरणों की माप प्राप्त होगी। हम देखते हैं कि व्यंजक (A), x_i तथा y_i की इकाइयों (units) पर आश्रित है और इसलिए यह x_i तथा y_i की इकाइयों में परिवर्तन होने पर परिवर्तित हो जाएगा। इकाइयों के अन्तरों की इस कठिन समस्या से बचने की एक विधि यह है कि व्यंजकों $(x_i - \bar{x})$ तथा $(y_i - \bar{y})$ को क्रमशः σ_x तथा σ_y से विभाजित कर दिया जाए, जिससे सहसम्बन्ध गुणांक इकाइयों से स्वतन्त्र हो जाए। इसलिए व्यंजक (A), को $\sigma_x \sigma_y$ से विभाजित करने पर हमें वाँछित माप प्राप्त हो जानी चाहिए। व्यंजक (A), x तथा y का सहप्रसरण (covariance) कहलाता है तथा इसे $\text{Cov}(x, y)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। इस प्रकार, (1) को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \,.\, \text{Var}(y)}} \qquad (2)$$

जहाँ $\text{Var}(x) = x$ का प्रसरण

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

तथा $\text{Var}(y) = y$ का प्रसरण

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

11.5 सहसम्बन्ध गुणांक के लिए एक वैकल्पिक सूत्र

यदि x तथा y के युग्मित प्रेक्षणों के संख्यात्मक मान बहुत बड़े हों, तो अनुच्छेद 11.4 में दिए सूत्र (1) या (2) की सहायता से, दोनों चरों के बीच का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने में बहुत कठिन

संख्यात्मक अभिकलन (computations) आते हैं। इसलिए हम एक वैकल्पिक सूत्र की स्थापना करेंगे जो कभी-कभी सहसम्बन्ध गुणांक निकालने में बहुत सुविधाजनक रहता है।

माना $u_i=\dfrac{x_i-a}{h}$ तथा $v_i=\dfrac{y_i-b}{k}$ (B)

जहाँ a, b, h, k कोई स्वैच्छिक स्थिरांक हैं।

(B) से हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$x_i=hu_i+a \text{ तथा } y_i=kv_i+b$$

इसलिए, $\bar{x}=a+h\bar{u}$ तथा $\bar{y}=b+k\bar{v}$ [पुस्तक III का अनुच्छेद 23.2 देखिए]

जहाँ $\bar{u}$ तथा $\bar{v}$ क्रमशः u_i's तथा v_i's के माध्य हैं।

इसलिए, $x_i-\bar{x}=h(u_i-\bar{u})$ तथा $y_i-\bar{y}=k(v_i-\bar{v})$

अनुच्छेद, 11·4 के (1) में इन मानों को रखने पर, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n} h(u_i-\bar{u})\;k(v_i-\bar{v})}{n\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^2(u_i-\bar{u})^2}\;\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k^2(v_i-\bar{v})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} (u_i-\bar{u})\,(v_i-\bar{v})}{n\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (u_i-\bar{u})^2}\;\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (v_i-\bar{v})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} (u_i-\bar{u})\,(v_i-\bar{v})}{n\sigma u\sigma v}$$

$$=r_{uv}$$

अतः, हम देखते हैं कि यदि हम मूलबिन्दु को बदल दें तथा एक नया पैमाना (scale) चुन लें, तो सहसम्बन्ध गुणांक में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

उपर्युक्त सूत्र को निम्न प्रकार और भी सरल किया जा सकता है :
हमें ज्ञात है कि

$$r_{uv} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \bar{u}\bar{v} - \frac{\bar{u}\sum_{i=1}^{n} v_i}{n} - \frac{\bar{v}\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}{n}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2}{n}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - \bar{u}\bar{v}}{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i\right)}{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2}}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} u_i v_i - \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{i=1}^{n} v_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2}} \quad (3)$$

टिप्पणी : वास्तविक अभिकलनों में हम $h=k=1$ ले सकते हैं, जिससे हम मान सकते हैं कि $u_i=x_i-a$ तथा $v_i=y_i-b$ हैं। a तथा b को इस प्रकार चुनना चाहिए कि लगभग सभी u_i तथा v_i संख्यात्मक रूप से क्रमशः x_i तथा $y_i(i=1, 2, \ldots, n)$ से छोटे हों। हम आगे अनुच्छेद 11.7 में सहसम्बन्ध गुणांक निकालने में अब तक पढ़े गए सूत्रों के उपयोग को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

11.6 सहसम्बन्ध गुणांक की सीमाएँ

अब हम दो चरों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक की सीमाएँ ज्ञात करेंगे तथा यह दिखायेंगे कि यह -1 तथा 1 के बीच स्थित होता है।

यह दिखाने के लिए, हम सहसम्बन्ध गुणांक के सूत्र (1) से प्रारम्भ करते हैं।

हम $X_i = x_i - \bar{x}$

तथा $Y_i = y_i - \bar{y}$

रखते हैं। इसलिए,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}\right.$$

इसी प्रकार,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

तथा $$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n\sigma_x\sigma_y}$$ (A)

अब हमें निम्न प्राप्त है :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma_x} \pm \frac{Y_i}{\sigma_y}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sigma_x^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{\sigma_y^2} \pm \frac{2\sum_{i=1}^{n} Y_i Y_i}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{n\sigma_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{n\sigma_y^2}{\sigma_y^2} \pm 2nr_{xy}$$ [(A) से]

$$= 2n \pm 2nr_{xy} = 2n(1 \pm r_{xy})$$

उपर्युक्त सर्वसमिका (identity) का वाम पक्ष n संख्याओं के वर्गों का योग है और इसलिए यह धनात्मक या शून्य है।

अतः, $1 \pm_x r_y \geqslant 0$

अर्थात्, $r_{xy} \leqslant 1$ तथा $r_{xy} \geqslant -1$

अर्थात्, $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$

अर्थात्, सहसम्बन्ध गुणांक -1 तथा $+1$ के बीच स्थित होता है।

यदि $r_{xy} = 1$ हो, तो हम कहते हैं कि x तथा y के बीच एक परिपूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध है।

यदि $r_{xy} = -1$ हो, तो हम कहते हैं कि x तथा y के बीच एक परिपूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

यदि $r_{xy} = 0$ हो, तो हम कहते हैं कि दोनों चरों के बीच कोई भी सहसम्बन्ध नहीं है, अर्थात्, दोनों चर असहसम्बन्धी हैं।

यदि $r_{xy} > 0$ हो, तो हम कहते हैं कि सहसम्बन्ध धनात्मक (सीधा) है।

यदि $r_{xy} < 0$ हो, तो हम कहते हैं कि सहसम्बन्ध ऋणात्मक (उल्टा) है।

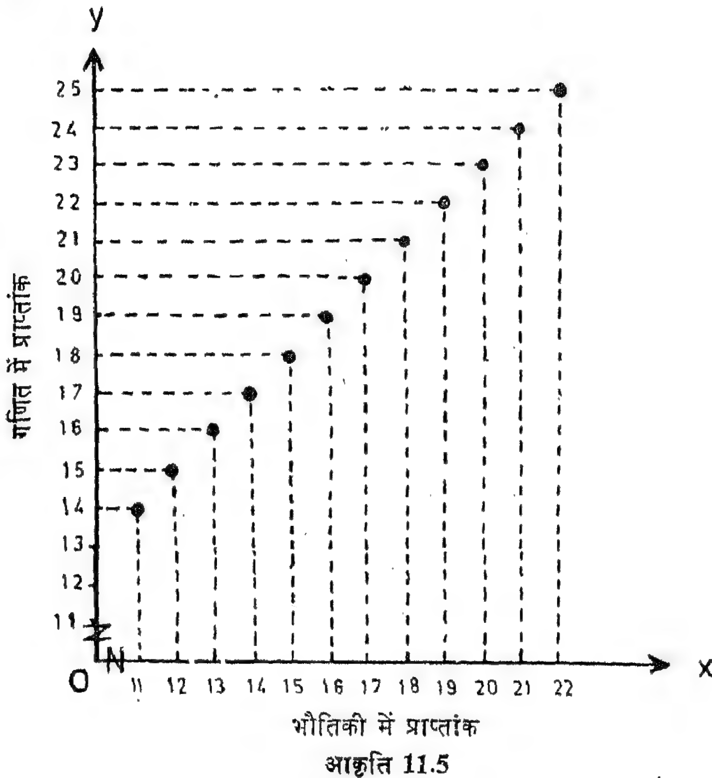
11.7 हल उदाहरण

उदाहरण 1 : 20 विद्यार्थियों के भौतिकी तथा गणित में प्राप्तांकों (25 में से) का बंटन निम्न है :

भौतिकी में प्राप्तांक	18	20	11	20	14	15	13	16	17	20	22	13	15	16	20	22	22	21	19	12
गणित में प्राप्तांक	21	23	14	23	17	18	16	19	20	23	25	16	18	19	23	25	25	24	22	15

एक प्रकीर्ण आरेख खींचिए तथा भौतिकी और गणित में प्राप्त अंकों के बीच सहसम्बन्ध का एक अनुमान दीजिए।

हल : आइये, समकोणिक निर्देशांक अक्षों का प्रयोग करते हुए सभी 20 विद्यार्थियों के लिए, क्रमित युग्मों (18, 21), (20, 23),...इत्यादि को आलेखित करें जैसाकि आकृति 11.5 में दिखाया गया है। क्योंकि बिन्दुओं का आलेख ठीक एक रेखा है और उसकी प्रवृत्ति ऊपर की ओर जाने की है, अतः दिए गए आँकड़े 20 विद्यार्थियों द्वारा भौतिकी तथा गणित में प्राप्त अंकों के बीच एक परिपूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध प्रदर्शित करते हैं।



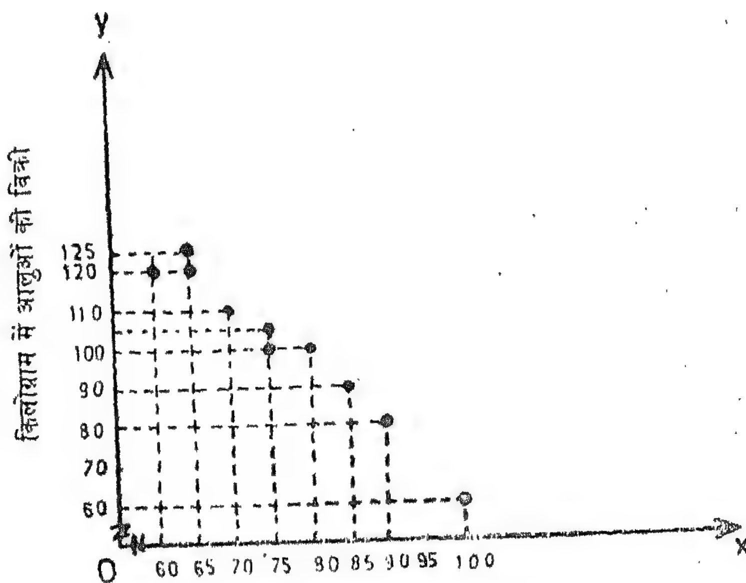
आकृति 11.5

उदाहरण 2 : किसी विशेष दुकान में किसी महीने के पहले 10 दिनों में, आलुओं के मूल्य व उनकी बिक्री के आंकड़े नीचे दिये गये हैं :

महीने का दिन	पहला	दूसरा	तीसरा	चौथा	पाँचवाँ	छठा	सातवाँ	आठवाँ	नौवाँ	दसवाँ
पैसे प्रति किलोग्राम में आलुओं का मूल्य	60	65	65	70	75	75	80	85	90	100
किलोग्राम में आलुओं की बिक्री	120	125	120	110	105	100	100	90	80	60

एक प्रकीर्ण आरेख खींचिए तथा आलुओं के मूल्यों और बिक्री के बीच सहसम्बन्ध का अनुमान लगाइए।

हल : आइये समकोणिक निर्देशांक अक्षों को लेकर सभी 10 दिनों के लिए क्रमित युग्मों (60, 120), (65, 125), इत्यादि को आलेखित करें जैसा कि आकृति 11.6 में दिखाया गया है।



आकृति 11.6

क्योंकि बिन्दु लगभग एक रेखा के आस-पास जमा होते हैं तथा नीचे की ओर जाने की प्रवृत्ति दर्शाते हैं, इसलिए दिए हुए आँकड़े अधिक मात्रा का एक ऋणात्मक सहसम्बन्ध प्रदर्शित करते हैं। इस

प्रकार, हम आँकड़ों तथा प्रकीर्ण आरेख से यह कह सकते हैं कि जैसे-जैसे आलुओं के मूल्य बढ़ते जाते हैं, उनकी बिक्री घटती जाती है।

उदाहरण 3 : निम्नलिखित आँकड़ों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

x	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	18	19	17	16	14	15	13	11	12	11	12	10

हल : यहां x तथा y के मान अधिक बड़ी संख्याएँ नहीं हैं, इसलिए इस प्रश्न को हम अनुच्छेद 11.4 के सूत्र (1) की सहायता से सीधा हल करेंगे। हम निम्नलिखित सारणी बनाते हैं :

x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\ (y_i-\bar{y})$
12	18	5.5	4	30.25	16	22.0
11	19	4.5	5	20.25	25	22.5
10	17	3.5	3	12.25	9	10.5
9	16	2.5	2	6.25	4	5.0
8	14	1.5	0	2.25	0	0.0
7	15	0.5	1	0.25	1	0.5
6	13	−0.5	−1	0.25	1	0.5
5	11	−1.5	−3	2.25	9	4.5
4	12	−2.5	−2	6.25	4	5.0
3	11	−3.5	−3	12.25	9	10.5
2	12	−4.5	−2	20.25	4	9.0
1	10	−5.5	−4	30.25	16	22.0
$\Sigma x_i=78$	$\Sigma y_i=168$			143.00	98	112.0

$n=12$

इसलिए, $\bar{x}=\frac{78}{12}=.5$ तथा $y=\frac{168}{12}=14.0$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{143}{12}}=3.45$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{98}{12}}=2.86$$

$$r_{xy}=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})\ (y_i-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$$

$$=\frac{112.0}{12\times 3.45\times 2.86}=\frac{112.000}{118.404}$$

$$=0.95$$

ध्यान दीजिए कि सारणी के पहले दो स्तम्भों (columns) में दिए x_i तथा y_i के मानों से पहले हमने $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ परिकलित किए हैं और फिर अन्य स्तम्भों के लिए मान ज्ञात किए हैं।

उदाहरण 4 : वैकल्पिक सूत्र की सहायता से उदाहरण 3 की सारणी में दिए गए x तथा y के मानों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :

x_i	y_i	$u_i=x_i-7$	$v_i=y_i-15$	v_i^2	v_i^2	u_iv_i
12	18	5	3	25	9	15
11	19	4	4	16	16	16
10	17	3	2	9	4	6
9	16	2	1	4	1	2
8	14	1	—1	1	1	—1
7	15	0	0	0	0	0
6	13	—1	—2	1	4	2
5	11	—2	—4	4	16	8
4	12	—3	—3	9	9	9
3	11	—4	—4	16	16	16
2	12	—5	—3	25	9	15
1	10	—6	—5	36	25	30
		—6	—12	146	110	118

$$r_{xy}=\frac{n\Sigma u_iv_i-\Sigma u_i\Sigma v_i}{\sqrt{n\Sigma u_i^2-(\Sigma u_i)^2}\ \sqrt{n\Sigma v_i^2-(\Sigma v_i)^2}}$$

$$=\frac{12\times 118-(-6)(-12)}{\sqrt{12\times 146-(-6)^2}\ \sqrt{12\times 110-(-12)^2}}$$

$$=\frac{1416-72}{\sqrt{1752-36}\sqrt{1320-144}}=\frac{1344}{\sqrt{1716}\sqrt{1176}}$$

$$=\frac{1344}{1420.57}$$

$$=0.95$$

प्रश्नावली 11.1

1. किन्हीं 15 दिन की वर्षा के समय बरसातियों की बिक्री के आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

दिनों की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
मि० मी० में वर्षा	5	10	15	6	20	12	8	9	21	2	4	16	18	7	11
बेची गई बरसातियों की संख्या	30	55	80	35	105	65	45	50	110	15	25	85	95	40	60

इसका एक प्रकीर्ण आरेख खींचिये तथा वर्षा तथा बरसातियों की बिक्री के बीच सम्बन्ध की व्याख्या करने का प्रयत्न कीजिए।

2. दो चरों x तथा y के युग्मों के मान नीचे दिए गए हैं :

x	2	4	5	6	3	6	8	10	12	13
y	5	6	6	8	4	8	12	15	15	16

इसका एक प्रकीर्ण आरेख खींचिए तथा x और y के बीच सहसम्बन्ध की व्याख्या कीजिए।

3. पतियों तथा पत्नियों की आयु से सम्बन्धित आँकड़े निम्नलिखित हैं :

जोड़े की क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पति की आयु (वर्षों में)	22	38	32	40	50	60	50	50	70	80
पत्नी की आयु (वर्षों में)	20	35	36	20	30	40	45	60	50	70

एक प्रकीर्ण आरेख खींचिए तथा उससे परिणाम की व्याख्या कीजिए।

4. वर्षा तथा किसी खेत के लिए प्रति एकड़ गेहूँ की पैदावार निम्न है :

वर्षा (सें० मी० में)	20	35	32	40	43	45	30	35	50	25
गेहूँ की पैदावार (क्विंटल में)	120	150	145	100	120	146	155	120	140	130

एक प्रकीर्ण आरेख खींचिए तथा वर्षा एवं गेहूँ की पैदावार के बीच सम्बन्ध की व्याख्या कीजिए।

5. 20 विद्यार्थियों की आयु तथा लम्बाइयों के आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

विद्यार्थी की क्रम संख्या	आयु (वर्षों में)	लम्बाई (सें० मी० में)
1	10	150
2	12	150
3	14	150
4	11	145
5	13	140
6	18	150
7	16	150
8	17	180
9	15	160
10	13	145
11	14	150
12	12	135
13	13	150
14	12	140
15	13	150
16	14	160
17	16	160
18	15	150
19	13	140
20	12	155

एक प्रकीर्ण आरेख खींचिए तथा इन विद्यार्थियों की आयु एवं लम्बाइयों के बीच सम्बन्ध की व्याख्या कीजिए।

6. दो चरों x और y के लिए युग्मित माप निम्नलिखित हैं :

x	3	4	5	8	7	9	6	2	1
y	5	3	4	7	8	7	6	9	2

x तथा y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए।

7. नीचे दिए गए आँकड़ों से, दो परीक्षाओं के प्राप्तांकों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

परीक्षा I	18	17	16	15	14	14	13	13	13	12	12	11	10	10
परीक्षा II	10	12	8	10	7	10	6	8	7	6	5	5	6	4

8. ऊपर दिए गए प्रश्न 1 का सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए तथा प्रकीर्ण आरेख द्वारा की गई व्याख्या की पुष्टि कीजिए।

9. ऊपर दिए गए प्रश्न 3 का सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए तथा प्रकीर्ण आरेख द्वारा की गई व्याख्या की पुष्टि कीजिए।

10. नीचे दिए गए आँकड़ों के लिए x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

x	10	7	12	12	9	16	12	18	8	12	14	16
y	6	4	7	8	10	7	10	15	5	6	11	13

11. एक कक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा अंग्रेजी तथा हिन्दी में प्राप्त निम्नलिखित स्थानों (ranks) के बीच सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

अंग्रेजी में प्राप्त स्थान	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
हिन्दी में प्राप्त स्थान	3	10	5	1	2	9	4	8	7	6

12. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए :

वस्तुओं की पूर्ति	मूल्य
80	145
82	140
86	130
91	117
83	133
85	127
89	115
96	95
93	100

13. निम्नलिखित स्थितियों में x तथा y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

(*i*)

x	1	2	3	4	5	6
y	150	134	120	80	67	50

(*ii*)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	9	3	8	2	7	3	6	1	5	2

परिशिष्ट

सारणी

प्रसामान्य प्राविकता वक्र

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz$$

के अन्तर्गत क्षेत्रफल

z	$F(z)$	z	$F(z)$	z	$F(z)$	z	$F(z)$
.00	.5000						
.01	.5040	.31	.6217	.61	.7291	.91	.8186
.02	.5080	.32	.6255	.62	.7324	.92	.8212
.03	.5120	.33	.6293	.63	.7357	.93	.8238
.04	.5160	.34	.6331	.64	.7389	.94	.8264
.05	.5199	.35	.6368	.65	.7422	.95	.8289
.06	.5239	.36	.6406	.66	.7454	.96	.8315
.07	.5279	.37	.6443	.67	.7486	.97	.8340
.08	.5319	.38	.6480	.68	.7517	.98	.8365
.09	.5359	.39	.6517	.69	.7549	.99	.8389
.10	.5398	.40	.6554	.70	.7580	1.00	.8413
.11	.5438	.41	.6591	.71	.7611	1.01	.8438
.12	.5478	.42	.6628	.72	.7642	1.02	.8461
.13	.5517	.43	.6664	.73	.7673	1.03	.8485
.14	.5557	.44	.6700	.74	.7704	1.04	.8508
.15	.5596	.45	.6736	.75	.7734	1.05	.8531
.16	.5636	.46	.6772	.76	.7764	1.06	.8554
.17	.5675	.47	.6808	.77	.7794	1.07	.8577
.18	.5714	.48	.6844	.78	.7823	1.08	.8599
.19	.5753	.49	.6879	.79	.7852	1.09	.8621
.20	.5793	.50	.6915	.80	.7881	1.10	.8643
.21	.5832	.51	.6950	.81	.7910	1.11	.8665
.22	.5871	.52	.6985	.82	.7939	1.12	.8686
.23	.5910	.53	.7019	.83	.7967	1.13	.8708
.24	.5948	.54	.7054	.84	.7995	1.14	.8729
.25	.5987	.55	.7088	.85	.8023	1.15	.8749
.26	.6026	.56	.7123	.86	.8051	1.16	.8770
.27	.6064	.57	.7157	.87	.8078	1.17	.8790
.28	.6103	.58	.7190	.88	.8106	1.18	.8810
.29	.6141	.59	.7224	.89	.8133	1.19	.8830
.30	.6179	.60	.7257	.90	.8159	1.20	.8849

z	$F(z)$	z	$F(z)$	z	$F(z)$	z	$F(z)$
1.21	.8869	1.61	.9463	2.01	.9778	2.41	.9920
1.22	.8888	1.62	.9474	2.02	.9783	2.42	.9922
1.23	.8907	1.63	.9484	2.03	.9788	2.43	.9925
1.24	.8925	1.64	.9495	2.04	.9793	2.44	.9927
1.25	.8944	1.65	.9505	2.05	.9798	2.45	.9929
1.26	.8962	1.66	.9515	2.06	.9803	2.46	.9931
1.27	.8980	1.67	.9525	2.07	.9808	2.47	.9932
1.28	.8997	1.68	.9535	2.08	.9812	2.48	.9934
1.29	.9015	1.69	.9545	2.09	.9817	2.49	.9936
1.30	.9032	1.70	.9554	2.10	.9821	2.50	.9938
1.31	.9049	1.71	.9564	2.11	.9826	2.51	.9940
1.32	.9066	1.72	.9573	2.12	.9830	2.52	.9941
1.33	.9082	1.73	.9582	2.13	.9834	2.53	.9943
1.34	.9099	1.74	.9591	2.14	.9838	2.54	.9945
1.35	.9115	1.75	.9599	2.15	.9842	2.55	.9946
1.36	.9131	1.76	.9608	2.16	.9846	2.56	.9948
1.37	.9147	1.77	.9616	2.17	.9850	2.57	.9949
1.38	.9162	1.78	.9625	2.18	.9854	2.58	.9951
1.39	.9177	1.79	.9633	2.19	.9857	2.59	.9952
1.40	.9192	1.80	.9641	2.20	.9861	2.60	.9953
1.41	.9207	1.81	.9649	2.21	.9864		
1.42	.9222	1.82	.9656	2.22	.9868	2.70	.9965
1.43	.9236	1.83	.9664	2.23	.9871		
1.44	.9251	1.84	.9671	2.24	.9875	2.80	.9974
1.45	.9265	1.85	.9678	2.25	.9878		
1.46	.9279	1.86	.9686	2.26	.9881	2.90	.9981
1.47	.9292	1.87	.9693	2.27	.9884		
1.48	.9306	1.88	.9699	2.28	.9887	3.00	.9987
1.49	.9319	1.89	.9706	2.29	.9890		
1.50	.9332	1.90	.9713	2.30	.9893	3.20	.9993
1.51	.9345	1.91	.9719	2.31	.9896		
1.52	.9357	1.92	.9726	2.32	.9898	3.40	.9997
1.53	.9370	1.93	.9732	2.33	.9901		
1.54	.9382	1.94	.9738	2.34	.9904	3.60	.9998
1.55	.9394	1.95	.9744	2.35	.9906		
1.56	.9406	1.96	.9750	2.36	.9909	3.80	.9999
1.57	.9418	1.97	.9756	2.37	.9911		
1.58	.9429	1.98	.9761	2.38	.9913	4.00	1.0000
1.59	.9441	1.99	.9767	2.39	.9916		
1.60	.9452	2.00	.9772	2.40	.9918	4.50	1.0000
						5.00	1.0000
						5.50	1.0000

संदर्भिका

Inverse Trigonometric Functions and Differential Equations

(प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन तथा अवकल समीकरण)

[1] B. C. Das and B. N. Mukherjee : Pre-university Trigonometry.
U. N. Dhur & Sons Private Ltd., Calcutta (1968).

[2] B. Demidovich : Problems in Mathematical Analysis
(Translated from Russian)
Peace Publishers, Moscow.

[3] K. C. Maity and P. K. Bagchi : Integral Calculus including An Introduction to Differential Equations.
Indo-European Book Agency, Calcutta (1959).

[4] I. A. Maron : Problems in Calculus of One Variable
(Translated from Russian)
Mir Publishers, Moscow (1973).

[5] D. A. Murray : Introductory Course in Differential Equations.
Longmans, Green & Co. Ltd., London (1965).

[6] H. T. H. Piaggio : An Elementary Treatise on Differential Equations and Their Applications.
Orient Longmans Ltd., New Delhi (1966).

[7] N. S. Piskunov : Differential and Integral Calculus
(Translated from Russian)
Peace Publishers, Moscow.

[8] Gorakh Prasad : Text Book on Integral Calculus and Elementary Differential Equations.
Pothishala Private Ltd., Allahabad (1964).

[9] B. S. Ray : An Introduction to Differential Calculus.
Dasgupta & Co. Private Ltd., Calcutta (1950).

Three-Dimensional Geometry (त्रिविमीय ज्यामिति)

[1] M. C. Chaki : A Text Book of Analytic Geometry.
Calcutta Publishers, Calcutta (1979).

[2] K. M. Ghosh and T. C. Roy : Analytic Geometry.
Shreedhar Prakashani, Calcutta (1964).

[3] Shanti Narayan : Analytical Solid Geometry.
S. Chand & Co., New Delhi (1959).

Statistics and Probability Theory (सांख्यिकी तथा प्रायिकता सिद्धांत)

[1] J. N. Kapur and H. C. Saxena : Mathematical Statistics.
S. Chand & Co., New Delhi (1967).

[2] J. F. Kenney and E.S. Keeping : Mathematics of Statistics, Part I.
Affiliated East-West Press Private Ltd., New Delhi (1974).

[3] P. L. Meyer : Introductory Probability and Statistical Application.
American Publishing Co. Private Ltd., New Delhi (1970).

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$

   (iv) $-\frac{\pi}{2}$ (v) $\frac{2\pi}{3}$ (vi) $\frac{\pi}{6}$

   (vii) $\frac{\pi}{6}$ (viii) $-\frac{\pi}{4}$

3. (ii), (iv), (v), (viii)

11. (i) 0 (ii) $\frac{x+y}{1-xy}$

12. (i) $2-\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

*13. (i) $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ (ii) $3\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

   (iii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}(\sqrt{x})$ (iv) $\frac{x}{2}$

   (v) $\frac{\pi}{4}-x$ (vi) $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$

   (vii) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$ (viii) $\frac{x}{2}$

प्रश्नावली 2.1

1. (i) 1 (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) 1 (iv) $\frac{2}{3}$

   (v) $\frac{1}{2}$ (vi) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (vii) $-\frac{1}{4}$

2. (i) 1 (ii) -1

3. सतत

4. सतत

---

* सरलतम रूप में दूसरे उत्तर भी संभव हैं।

5. (i) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ (ii) $\frac{x-\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\text{cosec}^{-1}x-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (iv) $-\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$

(v) $-\frac{2x}{1+x^4}$

6. (i) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (iii) $\frac{2}{1+x^2}$

(iv) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ (v) $-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ (vi) 0

(vii) -2 (viii) $\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (ix) $\frac{1}{2(1+x^2)}$

(x) $\frac{1}{2}$ (xi) $\frac{1}{2}$ (xii) $-\frac{1}{1+x^2}$

(xiii) $-\frac{2}{1+x^2}$ (xiv) $\frac{ab}{a^2+b^2x^2}$ (xv) $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(xvi) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (xvii) $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

प्रश्नावली 3.1

1. (i) $\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x-\frac{1}{4}\sin^{-1}x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}$

(ii) $\frac{x^3}{3}\sin^{-1}x+\frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{9}$

(iii) $\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)$

(iv) $\frac{x^4-1}{4}\tan^{-1}x-\frac{1}{12}(x^3-3x)$

(v) $x\sec^{-1}x-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

(vi) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin^{-1}(\sqrt{x})+\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}$

(vii) $(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}$

(viii) $\frac{x^2}{3}\tan^{-1}(3x)-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(1+9x^2)$

(ix) $\frac{1}{4}\left\{x^4\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{x^2-1}\right\}$

(x) $x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\ \sin^{-1}x-2x$

(xi) $\frac{1+x^2}{2}(\tan^{-1}x)^2-x\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

(xii) $\frac{1}{2}\left[(x^2-2)\tan^{-1}(2x+3)+\frac{3}{4}\ln\left|2x^2+6x+5\right|-\frac{x}{2}\right]$

(xiii) $-\frac{\sin^{-1}x}{x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$

(xiv) $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{\tan^{-1}x}{x}$

(xv) $\frac{1}{2}(x^2-\sqrt{1-x^4}\sin^{-1}x^2)$

(xvi) $\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|$

(xvii) $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\sin^{-1}(\sqrt{x})$

(xviii) $\sec^{-1}x\{\ln|\sec^{-1}x|-1\}$

(xix) $\frac{x}{2}\cos^{-1}x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

3. $\pi-2$

4. $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}+\ln(1+\sqrt{2})-\frac{\pi}{2}$

5. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

टिप्पणी : प्रश्न 1 के प्रत्येक उत्तर में समाकलन स्थिरांक c को जोड़ना है।

प्रश्नावली 4.1

1. (i) क्रम 2, घात 1
   (ii) क्रम 1, घात 1
   (iii) क्रम 2, घात 1
   (iv) क्रम 1, घात 2
   (v) क्रम 1, घात 2

7. (i) $y=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{3}x^3-2\ln|x|+c$
   (ii) $y=x(\ln x-1)+c$
   (iii) $y=2\tan\frac{x}{2}-x+c$
   (iv) $y=\frac{1}{3}e^{3x}-x^2+c$

(v) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+\ln(\ln x)+c$

(vi) $y=\ln(\tan^2 x+2\tan x+5)+c$

(vii) $y=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{1}{6}(2x+1)^{3/2}$

$+\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}+c$

(viii) $y=\frac{1}{2}x^2+2x-13\ln|x+2|+c$

(ix) $y=\tan^{-1}x+c$

(x) $y=\tan^{-1}(x+1)+c$

(xi) $\cos y+\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x=c$

(xii) $y=\ln(e^x+e^{-x})+c$

(xiii) $y=\frac{1}{3}\sin^{-1}x^3+c$

(xiv) $\frac{x^2}{2}+\ln|1-y|=c$

(xv) $\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+\ln|x|+c$

(xvi) $y^2c=(y-1)^2|1-x^2|$

(xvii) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\ln|y|-x=c$

(xviii) $e^x+e^{-y}=c$

(xix) $\tan x\tan y=c$

(xx) $y=\frac{1}{6}(t\tan^2 t-\tan t+t)+c$, जहाँ $t=\tan^{-1}x^3$

(xxi) $y=c_1x+c_2$

(xxii) $y=\frac{3}{5}x^{5/3}-\frac{1}{2}x^2+c_1x+c_2$

(xxiii) $y=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)\sin^{-1}x+\frac{3}{4}x\sqrt{1-x^2}+c_1x+c_2$

(xxiv) $y=e^x(x-2)+c_1x+c_2$

(xxv) $y=\ln|\sec x|+c_1x+c_2$

(xxvi) $y=-\frac{1}{9}(\cos 3x+\sin 3x)+c_1x+c_2$

(xxvii) $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}\cos 2x+c_1x+c_2$

(xxviii) $y=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-3)+c_1x+c_2$

8. $4e^{3x}+3e^{-4y}=7$

9. $\sin\left(\frac{y-1}{x}\right)=a$

10. $y=(x+1)\ln(x+1)-x+3$

11. $y=\frac{1}{n^2}\left\{(-1)^n-\cos nx\right\}$

12. $c(x)=2x+0.075x^2+100$

13. $\frac{T-S}{150-S}=e^{-kt}$

14. $R=a\ln S+c$

15. (i) $i=c\, e^{\frac{-Rt}{L}}$

(ii) $i=\frac{E}{R}+c\, e^{\frac{-Rt}{L}}$

प्रश्नावली 5.1

1. $(a, 0, 0), (a, b, 0), (0, b, 0), (0, b, c), (0, 0, c), (a, 0, c), (0, 0, 0)$
2. $|x|,\ |y|,\ |z|$
3. $(-1, 2, 3), (1, -2, 3), (1, 2, -3), (-1, -2, 3), (1, -2, -3),$
$(-1, 2, -3), (-1, -2, -3)$
4. $(6, 0, 0), (1, -5, 0), (6, -5, 0), (1, 0, -5), (6, 0, -5), (1, -5, -5),$
$(6, -5, -5), \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$
5. $\sqrt{b^2+c^2},\ \sqrt{a^2+c^2},\ \sqrt{a^2+b^2}$
6. 2, 2, 3
7. (क) $(5, 0, -1)$ (ख) $(-3, 7, 7)$ (ग) $(0, 1, -2)$

प्रश्नावली 5.2

1. $2\sqrt{5}$
2. (i) $\left(\frac{13}{5}, \frac{8}{5}, \frac{14}{5}\right)$ (ii) $(17, 16, -2)$

3. (i) $\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

4. $\frac{22}{7}$

5. $\cos^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$

11. $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

12. $\left(\frac{19}{8}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$

13. $-2 : 3$

प्रश्नावली 6.1

1. $3x+5y+7z-28=0$
2. $-\frac{3x}{\sqrt{26}}+\frac{4y}{\sqrt{26}}-\frac{z}{\sqrt{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$
3. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{-2}{3}}+\frac{z}{\frac{2}{7}}=1$
4. $13x+6y+z-35=0$
6. $y+7=0$
8. $7x+3y-z=17$
9. नहीं, क्योंकि तीनों बिन्दु संरेखी हैं
10. $bcx+acy-abz=0$
13. $2x+2y-3z+3=0$
15. $28x-17y+9z=0$
16. $51x+15y-50z+173=0$
17. $12x-4y-3z=169$
18. $7x-3y-z+89=0$
19. $x+y+\sqrt{2z}-1=0$, $x+y-\sqrt{2z}-1=0$
20. $2x+7y-5z-21=0$, $11x+19y+31z-18=0$, $11x+19y+31z-18=0$

प्रश्नावली 7.1

1. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$
2. $\frac{x}{2}=\frac{1-y}{5}=\frac{z}{3}$

3. (i) $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z}{1}$

(ii) $\frac{x-\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{0}=\frac{y-\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{0}=\frac{z}{1}$

(iii) $\frac{x-a}{0}=\frac{y+\frac{d}{b}}{-c}=\frac{z}{b}$

(iv) $\frac{x-\frac{bf-dc}{ad}}{be}=\frac{y+\frac{f}{d}}{-ae}=\frac{z}{ad}$

4. $\left(\frac{11}{3}, \frac{26}{3}, -9\right)$

5. $\frac{x-5}{3}=\frac{y+7}{1}=\frac{z+3}{9}$

6. $(-1, -1, -1)$

8. $(3a, 2a, 3a)$; (a, a, a)

9. $\frac{x-2}{6}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{2}$; $(-4, 1, -3)$

10. $(-3, 5, 2)$

11. 13

12. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{2}$; 2 ; $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

13. $\frac{x-1}{6}=\frac{2-y}{5}=\frac{z-4}{8}$

14. 90°

15. $4x-y-2z-6=0$

16. $10x-2y-9z+6=0$

17. $4\sqrt{3}$; $x=y=z$

18. $\sqrt{\frac{2109}{110}}$

प्रश्नावली 8.1

1. (i) $x^2+y^2+z^2-4x-6y-10z+29=0$
   (ii) $x^2+y^2+z^2-4y-14z+49=0$
   (iii) $x^2+y^2+z^2+4x+2y+8z-15=0$

2. (i) $(-3, 4, -1)$, $\sqrt{26}$
   (ii) $\left(\frac{-3}{2}, 2, 0\right)$, $\sqrt{\frac{105}{2}}$

3. $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

4. $x^2+y^2+z^2-5x-5y-3z=0$

5. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z-1=0$
6. $x^2+y^2+z^2-2x-14y-16z+42=0$
7. $x^2+y^2+z^2-\frac{3+\sqrt{3}}{3}(x+y+z+\frac{2+\sqrt{3}}{3}=0$ तथा

$x^2+y^2+z^2-\frac{3-\sqrt{3}}{3}(x+y+z)+\frac{2-\sqrt{3}}{3}=0$
8. $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$
9. $3(x^2+y^2+z^2)-4(x+y+z)+1=0$
11. $\sqrt{5}$
12. $x^2+y^2+z^2-2a(x+y+z)+2a^2=0$,

$\frac{1}{3}(x-a)=\frac{1}{4}(a-y)=\frac{1}{5}(z-a)$

प्रश्नावली 9.1

1. (i) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (ii) 0.0729
2. (i) $\left(\frac{5}{6}\right)^6$ (ii) $\frac{11}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^5$ (iii) $31\times\left(\frac{1}{6}\right)^6$;

$\mu=1$, $\sigma^2=\frac{5}{6}$
3. $\frac{27}{20}\times\left(\frac{19}{20}\right)^7$
4. (i) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ (ii) $90\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$
5. (i) $\left(\frac{19}{20}\right)^5$ (ii) $\frac{6}{5}\times\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iii) $1-\left(\frac{6}{5}\right)\times\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iv) $1-\left(\frac{19}{20}\right)^5$
6. $\left(\frac{9}{10}\right)^4$
7. (i) $\left(\frac{5}{6}\right)^7$ (ii) $35\times\left(\frac{1}{6}\right)^7$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ (iv) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^7$
8. (i) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ (iii) $54\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$
9. $\left(\frac{1}{10}\right)^5$
10. (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (ii) $7\times\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (iii) $20\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$ (iv) $1-\left(\frac{2}{5}\right)^6$;

'X' चिह्न वाली गेंदों की संख्या का माध्य 2.4 है।
11. $\frac{5}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^9$
12. (i) $\left(\frac{1}{100}\right)^5$ (ii) $1-496\times\left(\frac{1}{100}\right)^5$

13. $P(1) = \frac{3125}{7776}$

$P(2) = \frac{1250}{7776}$

$P(3) = \frac{250}{7776}$

$P(4) = \frac{25}{7776}$

$P(5) = \frac{1}{7776}$

14. $P(0) = 0.4096$
$P(1) = 0.4096$
$P(2) = 0.1536$
$P(3) = 0.0256$
$P(4) = 0.0016$

15. $n=27,\ p=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3}$

16. $n=5,\ p=\frac{1}{5},\ q=\frac{4}{5}$

प्रश्नावली 9.2

1. माध्य $=22.22$, प्रसरण $=22.22$

2. $\frac{e^{-5} \cdot 5^{50}}{50!}$

3. $e^{-1}\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{[illegible]}\right]$

4. $P(1) = 0.2706$
$P(2) = 0.2706$
$P(3) = 0.1804$
$P(4) = 0.0902$
$P(5) = 0.0361$

5. 0.01936 (लगभग)

6. वाँछित प्रायिकता
$=0.4059$, प्वासों बंटन के प्रयोग से
$=0.3758$, द्विपद बंटन के प्रयोग से

7. $e^{-10}\left[11+\frac{(10)^2}{2!}+\frac{(10)^3}{3!}+\frac{(10)^4}{4!}+\frac{(10)^5}{5!}\right]$

8. 0.4795
9. (*i*) 0.2169 (लगभग)
   (*ii*) 0.3374 (लगभग)
10. $1-e^{-4}\left[5+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\frac{4^5}{5!}\right]$

प्रश्नावली 10.1

1. (*i*) 1.67 (*ii*) —2.00 (*iii*) —3.83 (*iv*) 3.67
2. (*i*) 0.0035 (*ii*) 0.9582 (*iii*) 0.7454 (*iv*) 0.0301 (*v*) 0.0581 (*vi*) 0.1519 (*vii*) 0.8530 (*viii*) 0.7588
3. 0.3998
4. 6.06%
5. (*i*) 0.0228 (*ii*) 50% (*iii*) 5.41%
6. 30.67%

प्रश्नावली 11.1

1. परिपूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध
2. अधिक मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध
3. अधिक मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध
4. कम मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध
5. अधिक मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध
6. 0.45
7. 0.85
8. 1.00
9. 0.78
10. 0.75
11. 0.22
12. —0.98
13. (*i*)—0.99
    (*ii*)—0.50

the under-developed lands, notably Africa, towards their eventual independence, and through its Colonial Office is vitally concerned with colonial development. It was in 1929 that the British Government established by Act of Parliament a Colonial Development Fund and the quotation on the second page of this book is from the revision of that Act made in the summer of 1940, an optimistic statement in the darkest days of the war Later, increased grants were made so that for the ten-year period ending March 1956, the allocation for development, welfare, and research was £120,000,000 ($336,000,000). The plans formulated by the British Government for the under-developed colonial areas resemble those of the Marshall Plan for Europe; they are designed essentially to help the areas concerned to stand on their own feet. It seems therefore vitally important that the good start which has been made in Anglo-American co-operation in the development of these tropical lands should be continued. It should have been made abundantly clear in what has been said that the task will call for all our united knowledge and concentration of purpose.

It was an important part of the Marshall Plan from its inception that the programme of the Economic Co-operation Administration should cover the 'dependent overseas territories' (a term which avoided the word 'colonies') of Belgium, France, the Netherlands, Portugal, and the United Kingdom. Professor J. E. Orchard has summarized in the *Geographical Review* for January 1951, the many projects in which ECA is interested—in 85 separate countries or units covering 8,900,000 square miles and 170,000,000 people in Africa, South-east Asia, and the Caribbean. The long-term development projects are estimated to cost $7,500,000,000, with communications and agriculture taking the lion's share and with more than a third of the total expenditure in tropical Africa. The work ante-dates, and is independent of, the Point IV programme, but works in close liaison to avoid overlapping. Primarily the aim is to help the under-developed countries to help themselves, and in so doing America is dealing a powerful blow against Communistic influences—a more important objective than the incidental increase in world supplies of certain raw materials.

CHAPTER VIII

Some Conclusions and Speculations

In the preceding chapters every effort has been made to give essential facts and to present an objective interpretation. Reasons are given for believing the mid-century population of the world to be of the order of 2,350,000,000. Reservations are made on account of inadequacy of data, but in all those areas where accurate census statistics are available, there is no possible doubt as to the rapidity of present population growth The years since the end of World War II have produced many surprises such as a crude birth-rate in the United States practically equaling that of India in 1947 and the rate of net increase considerably greater over the period 1937 to 1947. The marked post-war increase in birth-rates, a sort of catching up on deferred family planning, has led demographers to look for a new basis, that of total family, on which to make their forecasts rather than to place reliance on annual figures. There is no doubt that, whatever the causes, the confident estimates made in the nineteen-thirties of coming population declines have proved wide of the mark.[1] While the popular concept of the 'teeming millions' of India and China, some 40 per cent of all mankind, may be true enough, other widely held beliefs are far from true. The high rates of population increase are not there or in crowded Europe but in the Americas. What may happen in Africa we do not know: with increasing knowledge and skill in medicine and in agriculture, Africa may well be on the verge

[1] Nevertheless they are still being made 'Obviously,' said Kingsley Davis to the Inter-American Conference on Conservation of Renewable Natural Resources at Denver in September 1948, 'both the United States and Canada are reaching the end of their period of rapid population growth . in the 1990–2000 decade there will be no growth at all but a loss in population '

of great increases in population, but in the past that continent has lost ground relatively. It is the English-speaking whites who have increased four times as rapidly as the peoples of the world as a whole.

The average density of the world's population is of the order of 42 persons a square mile or roughly the actual density in the continental United States. Thus 14 or 15 acres are the share of each individual in the land surface of the globe. If we eliminate the areas where physical conditions are such that close settlement must remain unachieved, the share of the individual in what remains is reduced to 4 or 5 acres This includes the great problem lands of the tropics. The hot, wet, rain forests of the Amazon and the Congo and the alternately sun-baked and rain-drenched savanna lands are included in this total. Despite our boasts, we do not yet know how to handle these lands so as to make them, if they can be made, permanently productive for mankind. The optimists include them, and there is often a surprising similarity between present assessments of their values and older assessments of other lands which still remain unproductive after a hundred years or more. The pessimists, on the other hand, find that there is only a little more than one acre of productive ploughable land in the world per head of population and much of that is deteriorating through misuse.

It is certainly true that in country after country of the Old World, if we eliminate mountain areas and land excluded from agricultural statistics, there is less than two acres of land of all types per person to serve the needs of the population. In other words, population density exceeds 320 a square mile over land which can be considered, even on the most liberal interpretation, as actually or potentially productive.

This fact, rather than any deep-seated belief in one political ideology more than another, is behind the drive towards land planning and a balanced use of natural resources. Where the land shortage is desperate and hunger as well as poverty is a reality or but a step away, peoples will naturally cling to any straw—whether it is labelled fascism or communism—in the hope of salvation.

The inexorable machinations of fate have thrown the United States into a position of world leadership; as I have ventured to suggest, the head of a dollar empire more powerful than any empire the world has yet known. It is quite impossible to escape the responsibilities which result. In its own sphere the British Commonwealth has long had and known, even if it may not have adequately handled, these world problems and responsibilities. In both cases leadership has been hampered by insufficient knowledge.

Where Are the Under-Developed Lands?

Is it possible to indicate now where the under-developed lands are actually situated?

The first truth which seems to my mind to emerge is that from all points of view it is an easier task to increase production from the mid-latitude or temperate lands where we are familiar with the vagaries of nature and where we know something of the management of soils and the development of crops than it is to look for immediate development of tropical lands In this sense the great under-developed lands of the world as indicated by low outputs per acre must be held to include large parts of the United States,[1] Canada, Argentina, and Australia. Here the line of progress seems to be an increase in output per unit-area to levels comparable with those in the most highly productive parts of north-western Europe. Any such development must be accompanied by a willingness to foster both international population movements and international trade, that is, the abolition of restrictions.

In the second place, can we determine where the under-developed lands in the tropics are? An interesting approach is that known as the sieve method. We take out of the tropical lands all parts which have a mountainous, broken, or otherwise unsuitable terrain; then those parts too dry to be capable of cultivation and development; then other parts where soil is

[1] Black and Kiefer in *Future Food and Agriculture Policy* (*op cit*, p 91) approach the problem from a different angle but reach the conclusion 'If the land of the United States were in Europe, probably some 700 million acres would be cropped in some sort of rotation' (p. 138)

deficient in quantity or quality, and so on. At least this method has the advantage that it forces attention on potential areas. What is the present position and what are the adverse factors? This is where we realize how serious is our present ignorance. Actually we cannot use the sieve method because the information is not available. Always cutting across estimates based on actual or potential production of food, we have the very different pattern of world resources of power and minerals. The rich, still hidden it may be, resources of the under-developed lands put many of them in a potentially strong world position.

President Truman's Point IV

The assertion of Point IV quoted in the beginning of this book that 'humanity possesses the knowledge and the skill to relieve the suffering of these people', that is of under-developed areas where food is inadequate, cannot be taken literally. As I stress above, our knowledge, especially of land-use, is woefully inadequate. The destruction wrought over the past century by our modern machinery on the earth's natural resources is so colossal, so staggering, that if unchecked it can lead to the suicide of the whole human race. With our own problems of soil conservation but partly solved and the practice of types of balanced mixed farming which conserve rather than destroy the land by no means generally accepted, we contemplate turning loose the same old forces of destruction on the still unknown tropical lands. When we have learned to protect our own poor, naked, suffering soils with a mantle of grass and trees, when we desist from thrashing the life out of our middle-latitude lands by continuous ploughing and monoculture, when, in other words, we have taken steps to cast out the beam which is within our own eye, we shall be in a better position to deal with the mote in our brother's eye.

The survey of world conditions in Chapter III points to the countries of north-western Europe—Denmark, the Netherlands, England—as those enjoying a high standard of living, an unparalleled high level of agricultural output per unit-area, a steadily improving soil, and a complete absence of soil erosion.

This suggests that balanced mixed farming, with rotation of crops and carefully managed permanent pasture, with relatively small ten-acre fields but a high degree of mechanization, is the best answer for the world as a whole, that it is the solution to the problem of preserving the new lands of middle latitudes, and, in due course and suitably modified through research and experimentation, of lands yet to be tamed in the tropics.

In the meantime let us approach the problems in the tropics with due humility. there is much to be learned before we can teach.

The geographer's special field of survey and analysis has here a vital contribution to make—through a world land-use survey. The problem of the under-developed lands is not one to be solved by some act of government of this or any other country. It is a problem which will remain with us for decades, for generations to come, presenting us with a continuous challenge.

What Population Can the World Support?

Sooner or later the question is always posed: What population can or could the world support? To this there is no answer. the unknown factors are too numerous. When, however, we come to the ability of individual countries to produce food and so to support a population, there is a line of approach which I find interesting. If we take north-western Europe as a starting-point, where, as we have noted, the general standard of living is high and the efficiency of farming is such that the output per acre is as high as anywhere in the world, we find that, very roughly, one acre of improved farm land will support one human being. The countries mentioned are favoured by nature in some ways, but not in all. For example, Denmark has mostly poor soils, England lacks sunshine and has very varied soils, and so on We are surely entitled to see what would happen if other parts of the world were farmed as efficiently at our *present* standard of knowledge on *existing* acreages of farmland only. There is no recourse to hydroponics or hypothetical types of farming nor to expenditures on fertilizers which would be unjustified by the law of diminishing returns, but simply a thorough-going appli-

cation of known principles of good husbandry. On this basis, with 24 million acres, plus another half million obtained by converting 5 million acres of rough grazing as equivalent to 500,000 of improved land, we realize that England and Wales could support a population of 24½ million people. The actual population is 44 million, so that England and Wales as an example comes nowhere near self-sufficiency. If we take the actual cultivated area of Canada at 90 million acres and presume this to be capable of the same level of production as north-western Europe, we can postulate a potential population which could be fully supported from the land of Canada itself at 90 million, against the present 14 million. On the one hand this does not take into account the still unoccupied lands which can be settled and developed and which are vast in extent, but on the other hand it does not take into account the fact that Canada exports foodstuffs and raw materials to the over-populated parts of the world, including Britain. On this same basis the existing farmlands of the United States, taking only cropland and ploughable pasture and ignoring all the rest, could easily support a population of 500 million, against the present total of 150 million; and Russia 556 million, against the present 200 million. It may perhaps be dangerous to go on with this generalization, but it is difficult to claim that any of the new lands in mid-latitudes are fully developed in the sense that they carry the population they are able by their natural endowments to support.

Table XX shows possibilities of potential population in selected countries. On the basis here used the area of the world at present cultivated could support, if fully farmed by known best methods, at least 3,000,000,000 people on an adequate nutritional standard. If the lands at present unused or inadequately used could be brought into production on the same basis, potential world population climbs to over the 10,000,000,000 mark.

At the same time science is adding constantly to the sum of human knowledge, and there is every reason to expect advances which will simplify the problems of feeding the human race—if only man can overcome the barriers he himself has erected between the nations.

TABLE XX. ACTUAL AND POTENTIAL POPULATION SUPPORTABLE FROM LAND RESOURCES

Area in thousands of acres; population in thousands

	Total area	Improved farmland	Population Actual	Population Potential
Denmark	10,500	7,500	4,200	7,500
Netherlands	10,000	6,000	10,000	6,000
England and Wales	37,000	24,500	44,500	24,500
France	137,500	51,000[b]	41,500	51,000
Italy	123,500	38,000[b]	46,000	38,000
Canada	2,460,000	90,000[c]	13,000	90,000
United States	1,900,000	500,000[e]	150,000	500,000
Argentina	712,000	75,000[c]	16,000	75,000
India and Pakistan[a]	1,012,000	330,000[d]	420,000[a]	330,000
Burma	167,000	21,000[c]	17,000[a]	21,000+
Japan	168,000	12,500[c]	90,000	12,500+
New Zealand	66,000	19,125	2,000	19,125
Australia	1,900,000	29,000	8,000	29,000
U S S R	5,590,000	556,000[c]	200,000[a]	556,000

[a] Rough estimates
[b] Existing arable and tree crops only
[c] Arable only
[d] Crops and fallow
[e] Cropland and ploughable pasture.

If pasture (improved) is added to arable the figure for Italy becomes 51,000,000 and for France 81,000,000 acres

Index

INDEX

INDEX

INDEX